Corrientes solenoidales

XVI Encuentro de Topólogos

Vicente Muñoz
Ricardo Pérez-Marco

ICMAT, Consejo Superior de Investigaciones Científicas

23-24 Octubre 2009

Corrientes solenoidales

1 Introduction

2 Ciclos de Schwartzman y de Ruelle-Sullivan (teoría clásica)

3 Solenoides

4 Realización de clases de homología reales (resultado principal)

5 Conjectura de Hodge solenoidal

6 Densidad de las corrientes solenoidales

Representación de clases de homología

Uno de los problemas más importantes en geometría diferencial es el de representar geométricamente clases de homología:

Cuestión

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, y sea $a \in H_k(M, \mathbb{Z})$. ¿Existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $[S] = a$?

Thom (1953) dio la respuesta a esta pregunta:

- No es cierto en general. Construyó contraejemplos con clases de homología de torsión.
- Dio la siguiente respuesta positiva: $\exists N \gg 0$ para el cual existe $S \subset M$ con $[S] = N\,a$.

Representación de clases de homología

Uno de los problemas más importantes en geometría diferencial es el de representar geométricamente clases de homología:

Cuestión

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, y sea $a \in H_k(M, \mathbb{Z})$. ¿Existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $[S] = a$?

Thom (1953) dio la respuesta a esta pregunta:

- No es cierto en general. Construyó contraejemplos con clases de homología de torsión.
- Dio la siguiente respuesta positiva: $\exists N \gg 0$ para el cual existe $S \subset M$ con $[S] = N\,a$.

Representación de clases de homología

Uno de los problemas más importantes en geometría diferencial es el de representar geométricamente clases de homología:

Cuestión

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, y sea $a \in H_k(M, \mathbb{Z})$. ¿Existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $[S] = a$?

Thom (1953) dio la respuesta a esta pregunta:

- No es cierto en general. Construyó contraejemplos con clases de homología de torsión.
- Dio la siguiente respuesta positiva: $\exists N \gg 0$ para el cual existe $S \subset M$ con $[S] = N\,a$.

Representación de clases de homología

Uno de los problemas más importantes en geometría diferencial es el de representar geométricamente clases de homología:

Cuestión

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, y sea $a \in H_k(M, \mathbb{Z})$. ¿Existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $[S] = a$?

Thom (1953) dio la respuesta a esta pregunta:

- No es cierto en general. Construyó contraejemplos con clases de homología de torsión.
- Dio la siguiente respuesta positiva: $\exists N \gg 0$ para el cual existe $S \subset M$ con $[S] = N\,a$.

Representación de clases de homología

Uno de los problemas más importantes en geometría diferencial es el de representar geométricamente clases de homología:

Cuestión

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, y sea $a \in H_k(M, \mathbb{Z})$. ¿Existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $[S] = a$?

Thom (1953) dio la respuesta a esta pregunta:

- No es cierto en general. Construyó contraejemplos con clases de homología de torsión.
- Dio la siguiente respuesta positiva: $\exists N \gg 0$ para el cual existe $S \subset M$ con $[S] = N\,a$.

Representación de clases de homología

Uno de los problemas más importantes en geometría diferencial es el de representar geométricamente clases de homología:

Cuestión

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, y sea $a \in H_k(M, \mathbb{Z})$. ¿Existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $[S] = a$?

Thom (1953) dio la respuesta a esta pregunta:

- No es cierto en general. Construyó contraejemplos con clases de homología de torsión.
- Dio la siguiente respuesta positiva: $\exists N \gg 0$ para el cual existe $S \subset M$ con $[S] = N\,a$.

Cuestiones relacionadas

Muchas cuestiones importantes en geometría versan sobre la representabilidad por subojetos geométricos:

1. Existencia de subvariedades simplécticas en una variedad simpléctica (M, ω) – Donaldson, 1994.
2. Curvas pseudo-holomorfas $(S, j) \subset (M, \omega, J)$ en una variedad casi-Kähler – Gromov, 1985.
3. Inmersiones de variedades (inmersiones lisas, simplécticas, Riemannianas, complejas, etc.) $S \hookrightarrow M$.
4. Conjetura de Hodge: Si M es una variedad compleja proyectiva, $a \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces ¿se puede escribir $PD(N\,a) = [S_1] - [S_2]$, con $S_1, S_2 \subset M$ subvariedades complejas, $N \gg 0$?

Cuestiones relacionadas

Muchas cuestiones importantes en geometría versan sobre la representabilidad por subojetos geométricos:

1. Existencia de subvariedades simplécticas en una variedad simpléctica (M, ω) – Donaldson, 1994.
2. Curvas pseudo-holomorfas $(S, j) \subset (M, \omega, J)$ en una variedad casi-Kähler – Gromov, 1985.
3. Inmersiones de variedades (inmersiones lisas, simplécticas, Riemannianas, complejas, etc.) $S \hookrightarrow M$.
4. Conjetura de Hodge: Si M es una variedad compleja proyectiva, $a \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces ¿se puede escribir $PD(N\,a) = [S_1] - [S_2]$, con $S_1, S_2 \subset M$ subvariedades complejas, $N \gg 0$?

Cuestiones relacionadas

Muchas cuestiones importantes en geometría versan sobre la representabilidad por subojetos geométricos:

1. Existencia de subvariedades simplécticas en una variedad simpléctica (M, ω) – Donaldson, 1994.
2. Curvas pseudo-holomorfas $(S, j) \subset (M, \omega, J)$ en una variedad casi-Kähler – Gromov, 1985.
3. Inmersiones de variedades (inmersiones lisas, simplécticas, Riemannianas, complejas, etc.) $S \hookrightarrow M$.
4. Conjetura de Hodge: Si M es una variedad compleja proyectiva, $a \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces ¿se puede escribir $PD(N\,a) = [S_1] - [S_2]$, con $S_1, S_2 \subset M$ subvariedades complejas, $N \gg 0$?

Cuestiones relacionadas

Muchas cuestiones importantes en geometría versan sobre la representabilidad por subojetos geométricos:

1. Existencia de subvariedades simplécticas en una variedad simpléctica (M, ω) – Donaldson, 1994.
2. Curvas pseudo-holomorfas $(S, j) \subset (M, \omega, J)$ en una variedad casi-Kähler – Gromov, 1985.
3. Inmersiones de variedades (inmersiones lisas, simplécticas, Riemannianas, complejas, etc.) $S \hookrightarrow M$.
4. Conjetura de Hodge: Si M es una variedad compleja proyectiva, $a \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces ¿se puede escribir $PD(N\,a) = [S_1] - [S_2]$, con $S_1, S_2 \subset M$ subvariedades complejas, $N \gg 0$?

Cuestiones relacionadas

Muchas cuestiones importantes en geometría versan sobre la representabilidad por subojetos geométricos:

1. Existencia de subvariedades simplécticas en una variedad simpléctica (M, ω) – Donaldson, 1994.
2. Curvas pseudo-holomorfas $(S, j) \subset (M, \omega, J)$ en una variedad casi-Kähler – Gromov, 1985.
3. Inmersiones de variedades (inmersiones lisas, simplécticas, Riemannianas, complejas, etc.) $S \hookrightarrow M$.
4. Conjetura de Hodge: Si M es una variedad compleja proyectiva, $a \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{Z})$, entonces ¿se puede escribir $PD(N\,a) = [S_1] - [S_2]$, con $S_1, S_2 \subset M$ subvariedades complejas, $N \gg 0$?

Clases de homología reales

Sea M una variedad diferenciable y $a \in H_k(M, \mathbb{R})$ una clase de homología real.

Cuestión

¿Cómo construimos representantes geométricos de a?

Clases de homología reales

Sea M una variedad diferenciable y $a \in H_k(M, \mathbb{R})$ una clase de homología real.

Cuestión

¿Cómo construimos representantes geométricos de a?

Corrientes

Definición

Una corriente k-dimensional T es una forma cuyos coeficientes son distribuciones. Es decir, un funcional $T : \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$.

Una subvariedad orientada $S \subset M$ define una corriente, llamada corriente de integración:

$$\begin{aligned} (S) : \Omega^k(M) &\longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ \omega &\longmapsto \int_S \omega\,. \end{aligned}$$

Corrientes

Definición

Una corriente k-dimensional T es una forma cuyos coeficientes son distribuciones. Es decir, un funcional $T : \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$.

Una subvariedad orientada $S \subset M$ define una corriente, llamada corriente de integración:

$$\begin{aligned} (S) : \Omega^k(M) &\longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ \omega &\longmapsto \int_S \omega\,. \end{aligned}$$

Corrientes

Definición

Una corriente k-dimensional T es una forma cuyos coeficientes son distribuciones. Es decir, un funcional $T : \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$.

Una subvariedad orientada $S \subset M$ define una corriente, llamada corriente de integración:

$$\begin{aligned} (S) : \Omega^k(M) &\longrightarrow \mathbb{R}\,, \\ \omega &\mapsto \int_S \omega\,. \end{aligned}$$

Como $\langle (S), d\beta \rangle = 0$, tenemos definida una apliación

$$[S] : H^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Así S representa una clase de homología

$$[S] \in H^k(M)^* \cong H_k(M)\,,$$

por dualidad.

Equivalentemente, (S) es una corriente cerrada. Como la homología se puede calcular con corrientes, tenemos construida $[S]$ geométricamente.

Como $\langle (S), d\beta \rangle = 0$, tenemos definida una apliación

$$[S] : H^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Así S representa una clase de homología

$$[S] \in H^k(M)^* \cong H_k(M)\,,$$

por dualidad.

Equivalentemente, (S) es una corriente cerrada. Como la homología se puede calcular con corrientes, tenemos construida $[S]$ geométricamente.

Como $\langle (S), d\beta \rangle = 0$, tenemos definida una apliación

$$[S] : H^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Así S representa una clase de homología

$$[S] \in H^k(M)^* \cong H_k(M)\,,$$

por dualidad.

Equivalentemente, (S) es una corriente cerrada. Como la homología se puede calcular con corrientes, tenemos construida $[S]$ geométricamente.

Sea ahora $a \in H_k(M, \mathbb{R})$ una clase de homología real.

Por definición de clase de homología, a se puede representar como una suma formal de símplices con *pesos* reales, $a = \sum \lambda_i C_i$.

Podemos tomar la corriente de integración dada por:

$$\begin{array}{rcl} \Omega^k(M) & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ \omega & \mapsto & \sum \lambda_i \int_{C_i} \omega\,. \end{array}$$

Pero esto es obviamente no satisfactorio, por las singularidades de $\bigcup C_i$, y por haber añadido coeficientes (un dato de carácter no geométrico).

Cuestión

Buscamos un objeto geométrico y liso $S \hookrightarrow M$ que defina una corriente de integración con $[S] = a$.

Sea ahora $a \in H_k(M, \mathbb{R})$ una clase de homología real.
Por definición de clase de homología, a se puede representar como una suma formal de símplices con *pesos* reales, $a = \sum \lambda_i C_i$.
Podemos tomar la corriente de integración dada por:

$$\begin{array}{rcl} \Omega^k(M) & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ \omega & \mapsto & \sum \lambda_i \int_{C_i} \omega\,. \end{array}$$

Pero esto es obviamente no satisfactorio, por las singularidades de $\bigcup C_i$, y por haber añadido coeficientes (un dato de carácter no geométrico).

Cuestión

Buscamos un objeto geométrico y liso $S \hookrightarrow M$ que defina una corriente de integración con $[S] = a$.

Sea ahora $a \in H_k(M, \mathbb{R})$ una clase de homología real.
Por definición de clase de homología, a se puede representar como una suma formal de símplices con *pesos* reales, $a = \sum \lambda_i C_i$.
Podemos tomar la corriente de integración dada por:

$$\begin{array}{rcl} \Omega^k(M) & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ \omega & \mapsto & \sum \lambda_i \int_{C_i} \omega\,. \end{array}$$

Pero esto es obviamente no satisfactorio, por las singularidades de $\bigcup C_i$, y por haber añadido coeficientes (un dato de carácter no geométrico).

Cuestión

Buscamos un objeto geométrico y liso $S \hookrightarrow M$ que defina una corriente de integración con $[S] = a$.

Sea ahora $a \in H_k(M, \mathbb{R})$ una clase de homología real.
Por definición de clase de homología, a se puede representar como una suma formal de símplices con *pesos* reales, $a = \sum \lambda_i C_i$.
Podemos tomar la corriente de integración dada por:

$$\begin{array}{rcl} \Omega^k(M) & \longrightarrow & \mathbb{R}\,, \\ \omega & \mapsto & \sum \lambda_i \int_{C_i} \omega\,. \end{array}$$

Pero esto es obviamente no satisfactorio, por las singularidades de $\bigcup C_i$, y por haber añadido coeficientes (un dato de carácter no geométrico).

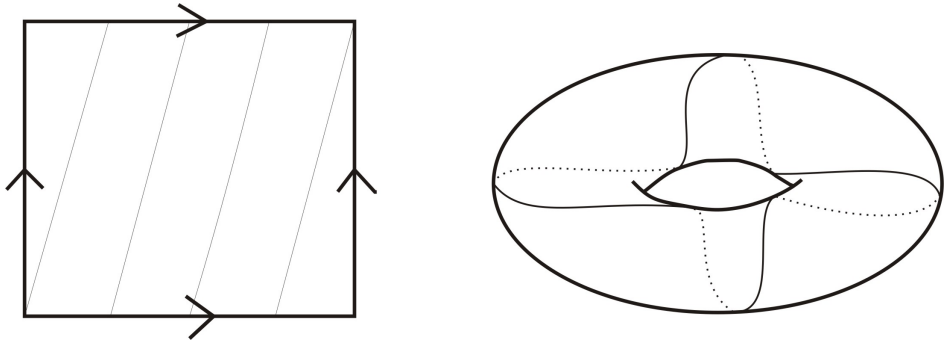
Cuestión

Buscamos un objeto geométrico y liso $S \hookrightarrow M$ que defina una corriente de integración con $[S] = a$.

Un ejemplo sencillo

Veamos el ejemplo del toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
$H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot e_1 \oplus \mathbb{Z} \cdot e_2$.

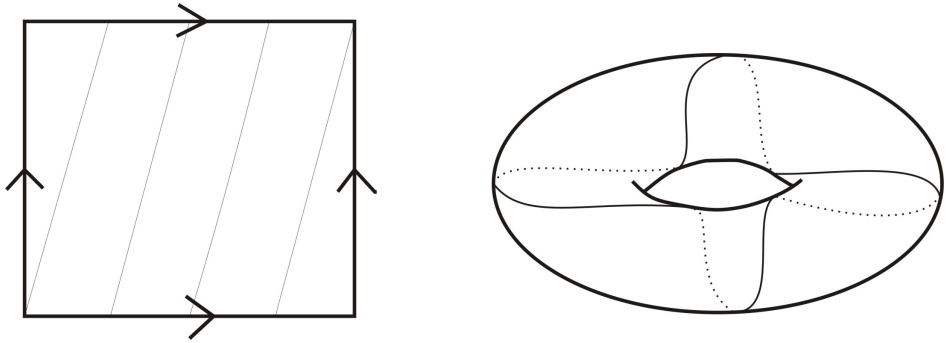
Una clase de homología entera, $\alpha = p_1 e_1 + p_2 e_2$, la podemos representar por la imagen de la recta $y = \frac{p_2}{p_1} x$ (salvo un factor de multiplicidad).



Un ejemplo sencillo

Veamos el ejemplo del toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
$H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot e_1 \oplus \mathbb{Z} \cdot e_2$.

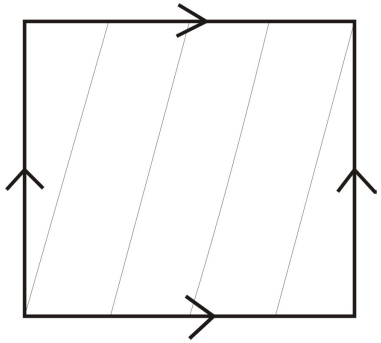
Una clase de homología entera, $\alpha = p_1 e_1 + p_2 e_2$, la podemos representar por la imagen de la recta $y = \frac{p_2}{p_1} x$ (salvo un factor de multiplicidad).

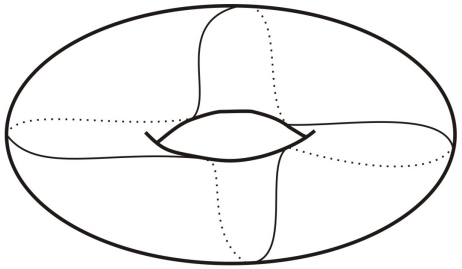


Un ejemplo sencillo

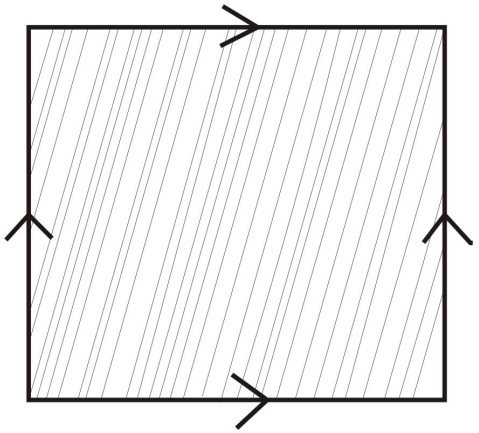
Veamos el ejemplo del toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
$H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot e_1 \oplus \mathbb{Z} \cdot e_2$.

Una clase de homología entera, $\alpha = p_1 e_1 + p_2 e_2$, la podemos representar por la imagen de la recta $y = \frac{p_2}{p_1} x$ (salvo un factor de multiplicidad).



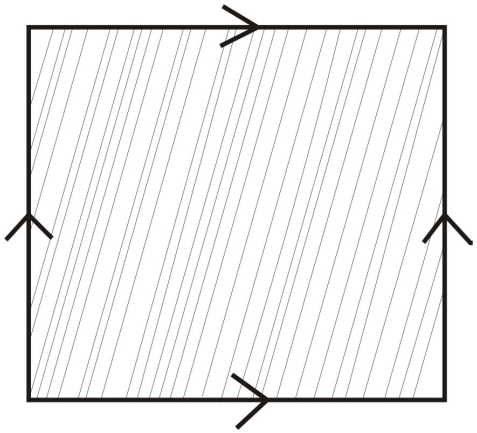


Si consideramos $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, la recta $y = \lambda x$ es densa en el toro.



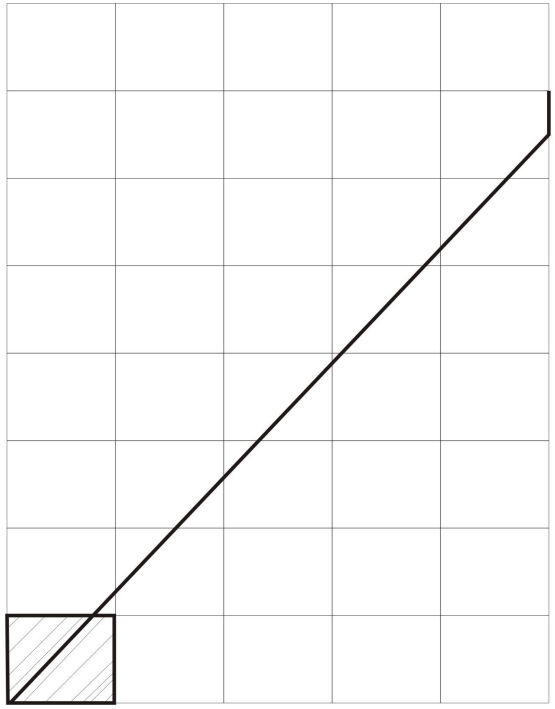
Consideremos porciones largas de esta curva. Tomamos $N \gg 0$, y sea $l_N = \{(x, \lambda x); x \in [0, N]\}$.

Si consideramos $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, la recta $y = \lambda x$ es densa en el toro.



Consideremos porciones largas de esta curva. Tomamos $N \gg 0$, y sea $l_N = \{(x, \lambda x); x \in [0, N]\}$.

Aproximadamente $[l_N] \sim Ne_1 + p_N e_2$, donde $\frac{p_N}{N} \sim \lambda$.



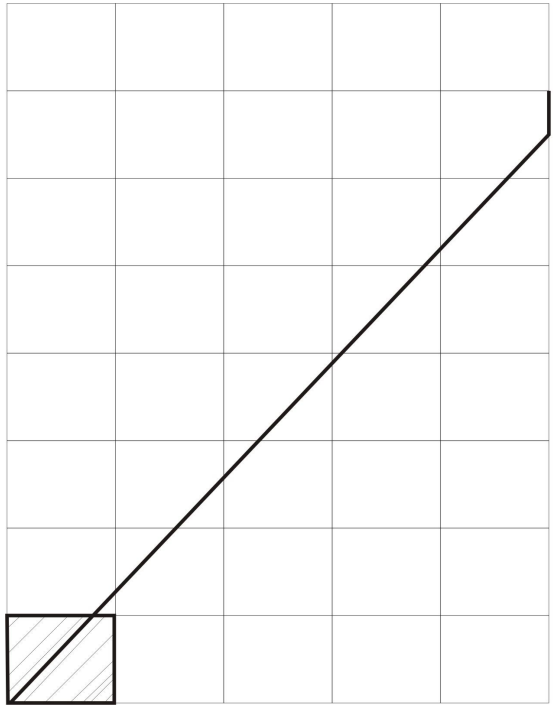
N = 5
p_N = 7

Por tanto,

$$\frac{1}{N}[l_N] = [e_1 + \frac{p_N}{N} e_2] \longrightarrow [e_1 + \lambda e_2] \in H_1(T^2, \mathbb{R}).$$

cuando $N \to \infty$.

Aproximadamente $[l_N] \sim Ne_1 + p_N e_2$, donde $\frac{p_N}{N} \sim \lambda$.



N = 5
p_N = 7

Por tanto,

$$\frac{1}{N}[l_N] = [e_1 + \frac{p_N}{N} e_2] \longrightarrow [e_1 + \lambda e_2] \in H_1(T^2, \mathbb{R}).$$

cuando $N \to \infty$.

Ciclos de Schwartzman en dimensión 1

Schwartzman (1957) definió, para $k = 1$, ciclos de homología reales de la siguiente forma.

Sea M una variedad diferenciable. Una curva parametrizada

$$c : \mathbb{R} \to M$$

define una corriente (c),

$$\langle (c), \omega \rangle = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ s \to -\infty}} \frac{1}{t-s} \int_s^t c^* \omega$$

para $\omega \in \Omega^1(M)$ (siempre que dicho límite exista).
Es decir, integramos a lo largo de porciones largas de la curva $c([s,t])$, y después de normalizar, tomamos el límite.
La corriente (c) es cerrada, con lo que tenemos definido el 1-ciclo de Schwartzman $[c] \in H_1(M, \mathbb{R})$.

Ciclos de Schwartzman en dimensión 1

Schwartzman (1957) definió, para $k = 1$, ciclos de homología reales de la siguiente forma.
Sea M una variedad diferenciable. Una curva parametrizada

$$c : \mathbb{R} \to M$$

define una corriente (c),

$$\langle (c), \omega \rangle = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ s \to -\infty}} \frac{1}{t-s} \int_s^t c^* \omega$$

para $\omega \in \Omega^1(M)$ (siempre que dicho límite exista).
Es decir, integramos a lo largo de porciones largas de la curva $c([s,t])$, y después de normalizar, tomamos el límite.
La corriente (c) es cerrada, con lo que tenemos definido el 1-ciclo de Schwartzman $[c] \in H_1(M, \mathbb{R})$.

Ciclos de Schwartzman en dimensión 1

Schwartzman (1957) definió, para $k = 1$, ciclos de homología reales de la siguiente forma.
Sea M una variedad diferenciable. Una curva parametrizada

$$c : \mathbb{R} \to M$$

define una corriente (c),

$$\langle (c), \omega \rangle = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ s \to -\infty}} \frac{1}{t-s} \int_s^t c^* \omega$$

para $\omega \in \Omega^1(M)$ (siempre que dicho límite exista).
Es decir, integramos a lo largo de porciones largas de la curva $c([s,t])$, y después de normalizar, tomamos el límite.
La corriente (c) es cerrada, con lo que tenemos definido el 1-ciclo de Schwartzman $[c] \in H_1(M, \mathbb{R})$.

Ciclos de Schwartzman en dimensión 1

Schwartzman (1957) definió, para $k = 1$, ciclos de homología reales de la siguiente forma.
Sea M una variedad diferenciable. Una curva parametrizada

$$c : \mathbb{R} \to M$$

define una corriente (c),

$$\langle (c), \omega \rangle = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ s \to -\infty}} \frac{1}{t-s} \int_s^t c^* \omega$$

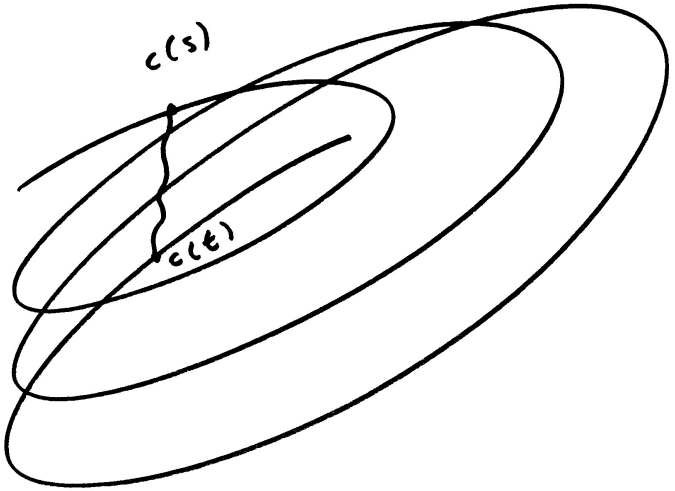
para $\omega \in \Omega^1(M)$ (siempre que dicho límite exista).
Es decir, integramos a lo largo de porciones largas de la curva $c([s,t])$, y después de normalizar, tomamos el límite.
La corriente (c) es cerrada, con lo que tenemos definido el 1-ciclo de Schwartzman $[c] \in H_1(M, \mathbb{R})$.

Definición equivalente

Usando la compacidad de M, para cada par de puntos $p, q \in M$ elegimos un camino $\gamma_{p,q}$ de p a q tal que para cada métrica Riemanniana, los caminos $(\gamma_{p,q})$ tengan longitud acotada uniformemente. El lazo

$$c_{s,t} := c([s,t]) * \gamma_{c(t),c(s)}$$

define una clase de homología entera $[c_{s,t}] \in H_1(M, \mathbb{Z})$.

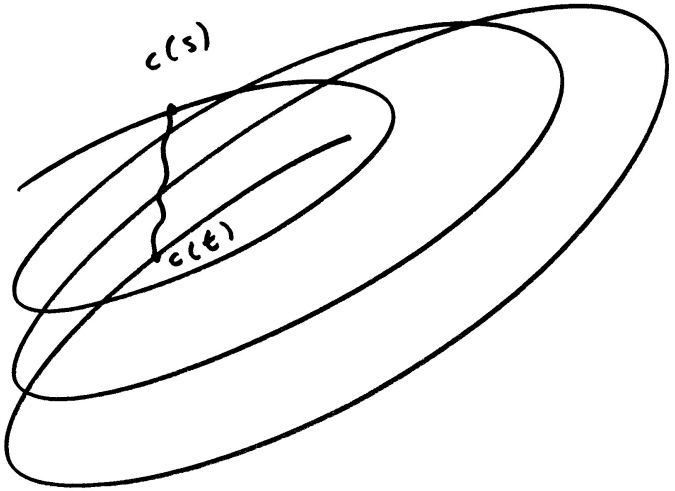


Definición equivalente

Usando la compacidad de M, para cada par de puntos $p, q \in M$ elegimos un camino $\gamma_{p,q}$ de p a q tal que para cada métrica Riemanniana, los caminos $(\gamma_{p,q})$ tengan longitud acotada uniformemente. El lazo

$$c_{s,t} := c([s,t]) * \gamma_{c(t),c(s)}$$

define una clase de homología entera $[c_{s,t}] \in H_1(M, \mathbb{Z})$.



Supongamos que el límite

$$[c] = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ s \to -\infty}} \frac{[c_{s,t}]}{t - s}$$

existe.

Entonces el 1-ciclo de Schwartzman definido por c es la clase

$$[c] \in H_1(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \otimes H_1(M, \mathbb{Z}) \,.$$

Supongamos que el límite

$$[c] = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ s \to -\infty}} \frac{[c_{s,t}]}{t - s}$$

existe.
Entonces el 1-ciclo de Schwartzman definido por c es la clase

$$[c] \in H_1(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \otimes H_1(M, \mathbb{Z}) \,.$$

Ciclos de Schwartzman de dimensión k

En `ArXiv:0910.2837`, extendemos la definición a dimensiones $k > 1$.

Sea M una variedad diferenciable compacta. Sea S una variedad Riemanniana completa k-dimensional y $f : S \to M$ una inmersión. (f, S) define un k-ciclo de Schwartzman

$$[f] \in H_k(M, \mathbb{R})$$

si para cualquier k-forma $\omega \in \Omega^k(M)$, the límite

$$\langle [f], \omega \rangle = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{Vol_S(B_R(x_0))} \int_{B_R(x_0)} f^* \omega$$

existe, donde $x_0 \in S$, y $B_R(x_0)$ es la bola de radio R y centro x_0.

Ciclos de Schwartzman de dimensión k

En `ArXiv:0910.2837`, extendemos la definición a dimensiones $k > 1$.
Sea M una variedad diferenciable compacta. Sea S una variedad Riemanniana completa k-dimensional y $f : S \to M$ una inmersión. (f, S) define un k-ciclo de Schwartzman

$$[f] \in H_k(M, \mathbb{R})$$

si para cualquier k-forma $\omega \in \Omega^k(M)$, the límite

$$\langle [f], \omega \rangle = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{Vol_S(B_R(x_0))} \int_{B_R(x_0)} f^* \omega$$

existe, donde $x_0 \in S$, y $B_R(x_0)$ es la bola de radio R y centro x_0.

Ciclos de Schwartzman de dimensión k

En `ArXiv:0910.2837`, extendemos la definición a dimensiones $k > 1$.
Sea M una variedad diferenciable compacta. Sea S una variedad Riemanniana completa k-dimensional y $f : S \to M$ una inmersión. (f, S) define un k-ciclo de Schwartzman

$$[f] \in H_k(M, \mathbb{R})$$

si para cualquier k-forma $\omega \in \Omega^k(M)$, the límite

$$\langle [f], \omega \rangle = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{Vol_S(B_R(x_0))} \int_{B_R(x_0)} f^* \omega$$

existe, donde $x_0 \in S$, y $B_R(x_0)$ es la bola de radio R y centro x_0.

Supongamos que podemos poner una *tapa pequeña* C_R a las subvariedades inmersas con borde $f(B_R(x_0))$, obteniendo $S_R = f(B_R(x_0)) \cup C_R$.

Entonces podemos definir

$$[f] = \lim_{R \to +\infty} \frac{[S_R]}{Vol_S(B_R(x_0))} \in H_k(M, \mathbb{R}),$$

si este límite existe.

Esto ocurre por ejemplo, cuando hay una *trapping region*, es decir, una bola $B \subset M$, y una sucesión $R_n \to +\infty$, tal que $f(\partial B_{R_n}(x_0)) \subset B$.

Supongamos que podemos poner una *tapa pequeña* C_R a las subvariedades inmersas con borde $f(B_R(x_0))$, obteniendo $S_R = f(B_R(x_0)) \cup C_R$.
Entonces podemos definir

$$[f] = \lim_{R \to +\infty} \frac{[S_R]}{Vol_S(B_R(x_0))} \in H_k(M, \mathbb{R}),$$

si este límite existe.

Esto ocurre por ejemplo, cuando hay una *trapping region*, es decir, una bola $B \subset M$, y una sucesión $R_n \to +\infty$, tal que $f(\partial B_{R_n}(x_0)) \subset B$.

Supongamos que podemos poner una *tapa pequeña* C_R a las subvariedades inmersas con borde $f(B_R(x_0))$, obteniendo $S_R = f(B_R(x_0)) \cup C_R$.
Entonces podemos definir

$$[f] = \lim_{R \to +\infty} \frac{[S_R]}{Vol_S(B_R(x_0))} \in H_k(M, \mathbb{R}) \,,$$

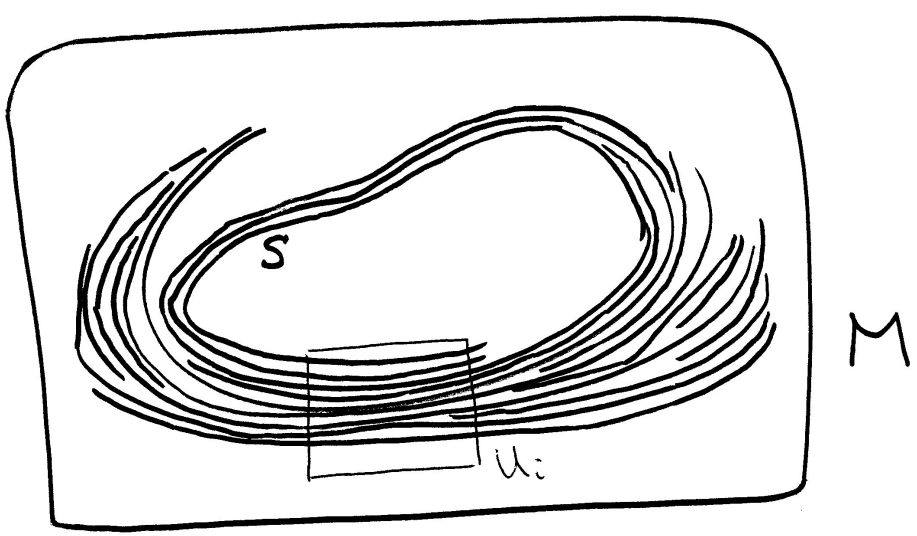
si este límite existe.

Esto ocurre por ejemplo, cuando hay una *trapping region*, es decir, una bola $B \subset M$, y una sucesión $R_n \to +\infty$, tal que $f(\partial B_{R_n}(x_0)) \subset B$.

Ciclos de Ruelle-Sullivan

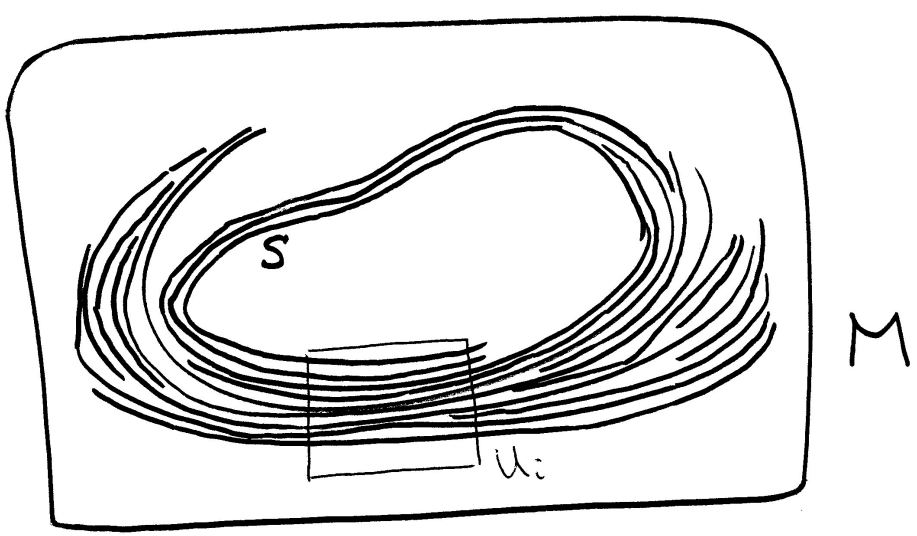
Ruelle y Sullivan (1975) introdujeron el siguiente tipo de corrientes.

Sea $S \subset M$ un subconjunto compacto foliado de M, i.e. localmente hay cajas $U \subset M$ tales que $U \cap S \cong D^k \times K(U)$, donde $L_y = D^k \times \{y\}$ son k-discos horizontales y $K(U)$ es la transversal.



Ciclos de Ruelle-Sullivan

Ruelle y Sullivan (1975) introdujeron el siguiente tipo de corrientes.
Sea $S \subset M$ un subconjunto compacto foliado de M, i.e. localmente hay cajas $U \subset M$ tales que $U \cap S \cong D^k \times K(U)$, donde $L_y = D^k \times \{y\}$ son k-discos horizontales y $K(U)$ es la transversal.



Asumamos que

- S tiene hojas orientadas (de forma continua).
- S tiene una medida $\mu_{K(U)}$ para cada transversal $K(U)$, que es invariante por la holonomía.

Entonces hay una corriente (S_μ) definida de la siguiente forma. Fijamos un recubrimiento (U_i) de S, con $U_i \cap S = D^k \times K(U_i)$, (ρ_i) partición de la unidad subordinada a (U_i). Para $\omega \in \Omega^k(M)$, definimos

$$\langle (S_\mu), \omega \rangle = \sum_i \int_{K(U_i)} \left(\int_{L_y} \rho_i \omega \right) \, d\mu_{K(U_i)}(y) \, .$$

La corriente de Ruelle-Sullivan es cerrada, por tanto define una clase de homología

$$[S_\mu] \in H_k(M, \mathbb{R}) \, .$$

Asumamos que

- S tiene hojas orientadas (de forma continua).
- S tiene una medida $\mu_{K(U)}$ para cada transversal $K(U)$, que es invariante por la holonomía.

Entonces hay una corriente (S_μ) definida de la siguiente forma. Fijamos un recubrimiento (U_i) de S, con $U_i \cap S = D^k \times K(U_i)$, (ρ_i) partición de la unidad subordinada a (U_i). Para $\omega \in \Omega^k(M)$, definimos

$$\langle (S_\mu), \omega \rangle = \sum_i \int_{K(U_i)} \left(\int_{L_y} \rho_i \omega \right) \, d\mu_{K(U_i)}(y) \, .$$

La corriente de Ruelle-Sullivan es cerrada, por tanto define una clase de homología

$$[S_\mu] \in H_k(M, \mathbb{R}) \, .$$

Asumamos que

- S tiene hojas orientadas (de forma continua).
- S tiene una medida $\mu_{K(U)}$ para cada transversal $K(U)$, que es invariante por la holonomía.

Entonces hay una corriente (S_μ) definida de la siguiente forma. Fijamos un recubrimiento (U_i) de S, con $U_i \cap S = D^k \times K(U_i)$, (ρ_i) partición de la unidad subordinada a (U_i). Para $\omega \in \Omega^k(M)$, definimos

$$\langle (S_\mu), \omega \rangle = \sum_i \int_{K(U_i)} \left(\int_{L_y} \rho_i \omega \right) \, d\mu_{K(U_i)}(y) \, .$$

La corriente de Ruelle-Sullivan es cerrada, por tanto define una clase de homología

$$[S_\mu] \in H_k(M, \mathbb{R}) \, .$$

Asumamos que

- S tiene hojas orientadas (de forma continua).
- S tiene una medida $\mu_{K(U)}$ para cada transversal $K(U)$, que es invariante por la holonomía.

Entonces hay una corriente (S_μ) definida de la siguiente forma. Fijamos un recubrimiento (U_i) de S, con $U_i \cap S = D^k \times K(U_i)$, (ρ_i) partición de la unidad subordinada a (U_i). Para $\omega \in \Omega^k(M)$, definimos

$$\langle (S_\mu), \omega \rangle = \sum_i \int_{K(U_i)} \left(\int_{L_y} \rho_i \omega \right) \, d\mu_{K(U_i)}(y) \, .$$

La corriente de Ruelle-Sullivan es cerrada, por tanto define una clase de homología

$$[S_\mu] \in H_k(M, \mathbb{R}) \, .$$

Asumamos que

- S tiene hojas orientadas (de forma continua).
- S tiene una medida $\mu_{K(U)}$ para cada transversal $K(U)$, que es invariante por la holonomía.

Entonces hay una corriente (S_μ) definida de la siguiente forma. Fijamos un recubrimiento (U_i) de S, con $U_i \cap S = D^k \times K(U_i)$, (ρ_i) partición de la unidad subordinada a (U_i). Para $\omega \in \Omega^k(M)$, definimos

$$\langle (S_\mu), \omega \rangle = \sum_i \int_{K(U_i)} \left(\int_{L_y} \rho_i \omega \right) \, d\mu_{K(U_i)}(y) \, .$$

La corriente de Ruelle-Sullivan es cerrada, por tanto define una clase de homología

$$[S_\mu] \in H_k(M, \mathbb{R}) \, .$$

Proposición

Si S no tiene hojas compactas, entonces $[S_\mu]^2 = 0$.

Cuestiones a resolver

(A) No podemos representar todas las clases de homología usando corrientes de Ruelle-Sullivan.

(B) ¿Cuál es la relación entre los ciclos de Schwartzman y de Ruelle-Sullivan?

Proposición

Si S no tiene hojas compactas, entonces $[S_\mu]^2 = 0$.

Cuestiones a resolver

(A) No podemos representar todas las clases de homología usando corrientes de Ruelle-Sullivan.

(B) ¿Cuál es la relación entre los ciclos de Schwartzman y de Ruelle-Sullivan?

Proposición

Si S no tiene hojas compactas, entonces $[S_\mu]^2 = 0$.

Cuestiones a resolver

(A) No podemos representar todas las clases de homología usando corrientes de Ruelle-Sullivan.

(B) ¿Cuál es la relación entre los ciclos de Schwartzman y de Ruelle-Sullivan?

Proposición

Si S no tiene hojas compactas, entonces $[S_\mu]^2 = 0$.

Cuestiones a resolver

(A) No podemos representar todas las clases de homología usando corrientes de Ruelle-Sullivan.

(B) ¿Cuál es la relación entre los ciclos de Schwartzman y de Ruelle-Sullivan?

- Para resolver (A), debemos permitirnos usar solenoides inmersos, en vez de solenoides embebidos en M.
- (B) requiere que el ciclo de Schwartzman definido por una hoja dé toda la información del solenoide, luego necesitamos un solenoide *minimal*.
- Para que cualquier hoja determine la medida transversa, necesitamos que el solenoide sea *únicamente ergódico*.
- Para que existan ciclos de Schwartzman bien definidos, construiremos solenoides con una *trapping region*.

Filosofía

Cuánto más restrictiva es la clase de objetos geométricos con los que construímos clases de homología reales, mejor.

- Para resolver (A), debemos permitirnos usar solenoides inmersos, en vez de solenoides embebidos en M.
- (B) requiere que el ciclo de Schwartzman definido por una hoja dé toda la información del solenoide, luego necesitamos un solenoide *minimal*.
- Para que cualquier hoja determine la medida transversa, necesitamos que el solenoide sea *únicamente ergódico*.
- Para que existan ciclos de Schwartzman bien definidos, construiremos solenoides con una *trapping region*.

Filosofía

Cuánto más restrictiva es la clase de objetos geométricos con los que construímos clases de homología reales, mejor.

- Para resolver (A), debemos permitirnos usar solenoides inmersos, en vez de solenoides embebidos en M.
- (B) requiere que el ciclo de Schwartzman definido por una hoja dé toda la información del solenoide, luego necesitamos un solenoide *minimal*.
- Para que cualquier hoja determine la medida transversa, necesitamos que el solenoide sea *únicamente ergódico*.
- Para que existan ciclos de Schwartzman bien definidos, construiremos solenoides con una *trapping region*.

Filosofía

Cuánto más restrictiva es la clase de objetos geométricos con los que construímos clases de homología reales, mejor.

- Para resolver (A), debemos permitirnos usar solenoides inmersos, en vez de solenoides embebidos en M.
- (B) requiere que el ciclo de Schwartzman definido por una hoja dé toda la información del solenoide, luego necesitamos un solenoide *minimal*.
- Para que cualquier hoja determine la medida transversa, necesitamos que el solenoide sea *únicamente ergódico*.
- Para que existan ciclos de Schwartzman bien definidos, construiremos solenoides con una *trapping region*.

Filosofía

Cuánto más restrictiva es la clase de objetos geométricos con los que construímos clases de homología reales, mejor.

- Para resolver (A), debemos permitirnos usar solenoides inmersos, en vez de solenoides embebidos en M.
- (B) requiere que el ciclo de Schwartzman definido por una hoja dé toda la información del solenoide, luego necesitamos un solenoide *minimal*.
- Para que cualquier hoja determine la medida transversa, necesitamos que el solenoide sea *únicamente ergódico*.
- Para que existan ciclos de Schwartzman bien definidos, construiremos solenoides con una *trapping region*.

Filosofía

Cuánto más restrictiva es la clase de objetos geométricos con los que construímos clases de homología reales, mejor.

Solenoides

En `ArXiv:0901.2836`, introducimos el siguiente concepto.

Definición

Un k-solenoide S es un espacio compacto Hausdorff con un atlas formado por cajas (U_i) de la forma $U_i \cong D^k \times K(U_i)$.

- Las hojas (locales) son $L_y = D^k \times \{y\}$, y las transversales (locales) son los $K(U_i)$.
- Una medida transversa es una colección de medidas $\mu = (\mu_T)$ para cada transversal T, satisfaciendo que μ_{T_1} y μ_{T_2} coinciden cuando se transportan usando cualquier aplicación de holonomía $h : T_1 \to T_2$.

Solenoides

En `ArXiv:0901.2836`, introducimos el siguiente concepto.

Definición

Un k-solenoide S es un espacio compacto Hausdorff con un atlas formado por cajas (U_i) de la forma $U_i \cong D^k \times K(U_i)$.

- Las hojas (locales) son $L_y = D^k \times \{y\}$, y las transversales (locales) son los $K(U_i)$.
- Una medida transversa es una colección de medidas $\mu = (\mu_T)$ para cada transversal T, satisfaciendo que μ_{T_1} y μ_{T_2} coinciden cuando se transportan usando cualquier aplicación de holonomía $h : T_1 \to T_2$.

Solenoides

En `ArXiv:0901.2836`, introducimos el siguiente concepto.

Definición

Un k-solenoide S es un espacio compacto Hausdorff con un atlas formado por cajas (U_i) de la forma $U_i \cong D^k \times K(U_i)$.

- Las hojas (locales) son $L_y = D^k \times \{y\}$, y las transversales (locales) son los $K(U_i)$.
- Una medida transversa es una colección de medidas $\mu = (\mu_T)$ para cada transversal T, satisfaciendo que μ_{T_1} y μ_{T_2} coinciden cuando se transportan usando cualquier aplicación de holonomía $h : T_1 \to T_2$.

Clase de homología representada por un solenoide

- Un solenoide está orientado si cada hoja es una variedad orientada y hay una colección de cajas que preservan la orientación de cada hoja local.
- Sea M una variedad diferenciable. Una inmersión $f : S \to M$ es una aplicación diferenciable que es una inmersión en cada hoja.

Sea $f : S_\mu \to M$ un k-solenoide orientado con medida transversa immerso en M.
Entonces (S_μ, f) define una corriente

$$(f_* S_\mu) : \Omega^k(M) \to \mathbb{R}\,,$$

Clase de homología representada por un solenoide

- Un solenoide está orientado si cada hoja es una variedad orientada y hay una colección de cajas que preservan la orientación de cada hoja local.
- Sea M una variedad diferenciable. Una inmersión $f : S \to M$ es una aplicación diferenciable que es una inmersión en cada hoja.

Sea $f : S_\mu \to M$ un k-solenoide orientado con medida transversa immerso en M.
Entonces (S_μ, f) define una corriente

$$(f_* S_\mu) : \Omega^k(M) \to \mathbb{R}\,,$$

Clase de homología representada por un solenoide

- Un solenoide está orientado si cada hoja es una variedad orientada y hay una colección de cajas que preservan la orientación de cada hoja local.
- Sea M una variedad diferenciable. Una inmersión $f : S \to M$ es una aplicación diferenciable que es una inmersión en cada hoja.

Sea $f : S_\mu \to M$ un k-solenoide orientado con medida transversa immerso en M.
Entonces (S_μ, f) define una corriente

$$(f_* S_\mu) : \Omega^k(M) \to \mathbb{R}\,,$$

Clase de homología representada por un solenoide

- Un solenoide está orientado si cada hoja es una variedad orientada y hay una colección de cajas que preservan la orientación de cada hoja local.
- Sea M una variedad diferenciable. Una inmersión $f : S \to M$ es una aplicación diferenciable que es una inmersión en cada hoja.

Sea $f : S_\mu \to M$ un k-solenoide orientado con medida transversa immerso en M.

Entonces (S_μ, f) define una corriente

$$(f_* S_\mu) : \Omega^k(M) \to \mathbb{R}\,,$$

Clase de homología representada por un solenoide

- Un solenoide está orientado si cada hoja es una variedad orientada y hay una colección de cajas que preservan la orientación de cada hoja local.
- Sea M una variedad diferenciable. Una inmersión $f : S \to M$ es una aplicación diferenciable que es una inmersión en cada hoja.

Sea $f : S_\mu \to M$ un k-solenoide orientado con medida transversa immerso en M.
Entonces (S_μ, f) define una corriente

$$(f_* S_\mu) : \Omega^k(M) \to \mathbb{R}\,,$$

Clase de homología representada por un solenoide

dada por

$$\langle (f_* S_\mu), \omega \rangle = \sum_i \int_{K(U_i)} \left(\int_{L_y} \rho_i f^* \omega \right) \, d\mu_{K(U_i)}(y) \, ,$$

donde (U_i) es un recubrimiento de S por cajas y (ρ_i) es una partición de la unidad subordinada a (U_i).

Esta corriente es cerrada y por tanto define una clase de homología real

$$[f_* S_\mu] \in H_k(M, \mathbb{R}) \, ,$$

que llamamos clase de Ruelle-Sullivan generalizada.

Clase de homología representada por un solenoide

dada por

$$\langle (f_* S_\mu), \omega \rangle = \sum_i \int_{K(U_i)} \left(\int_{L_y} \rho_i f^* \omega \right) \, d\mu_{K(U_i)}(y) \, ,$$

donde (U_i) es un recubrimiento de S por cajas y (ρ_i) es una partición de la unidad subordinada a (U_i).
Esta corriente es cerrada y por tanto define una clase de homología real

$$[f_* S_\mu] \in H_k(M, \mathbb{R}) \, ,$$

que llamamos clase de Ruelle-Sullivan generalizada.

Solenoides ergódicos

Un k-solenoide S es:

- minimal si todas las hojas son densas (en particular, cualquier transversal corta todas las hojas).
- únicamente ergódico si S admite una única medida transversa μ (salvo multiplicación por un escalar positivo cualquiera) y Sop $\mu = S$.
- ergódico si para cualquier transversal T y conjunto $A \subset T$ invariante por la holonomía,

$$\mu_T(A) = 0 \quad \text{o} \quad \mu_T(T - A) = 0\,.$$

Solenoides ergódicos

Un k-solenoide S es:

- minimal si todas las hojas son densas (en particular, cualquier transversal corta todas las hojas).
- únicamente ergódico si S admite una única medida transversa μ (salvo multiplicación por un escalar positivo cualquiera) y Sop $\mu = S$.
- ergódico si para cualquier transversal T y conjunto $A \subset T$ invariante por la holonomía,

$$\mu_T(A) = 0 \quad \text{o} \quad \mu_T(T - A) = 0\,.$$

Solenoides ergódicos

Un k-solenoide S es:

- minimal si todas las hojas son densas (en particular, cualquier transversal corta todas las hojas).
- únicamente ergódico si S admite una única medida transversa μ (salvo multiplicación por un escalar positivo cualquiera) y Sop $\mu = S$.
- ergódico si para cualquier transversal T y conjunto $A \subset T$ invariante por la holonomía,

$$\mu_T(A) = 0 \quad \text{o} \quad \mu_T(T - A) = 0\,.$$

Si dotamos a S de una métrica Riemanniana, y por tanto, de un k-volumen a lo largo de las hojas, entonces μ puede ser normalizada para dar volumen total 1 a todo el solenoide.

Para un solenode únicamente ergódico, S "contiene" la información de la medida μ. Por tanto S determina S_μ.

Si S es únicamente ergódico, S_μ es ergódico.

Si dotamos a S de una métrica Riemanniana, y por tanto, de un k-volumen a lo largo de las hojas, entonces μ puede ser normalizada para dar volumen total 1 a todo el solenoide.

Para un solenode únicamente ergódico, S "contiene" la información de la medida μ. Por tanto S determina S_μ.

Si S es únicamente ergódico, S_μ es ergódico.

Si dotamos a S de una métrica Riemanniana, y por tanto, de un k-volumen a lo largo de las hojas, entonces μ puede ser normalizada para dar volumen total 1 a todo el solenoide.

Para un solenode únicamente ergódico, S "contiene" la información de la medida μ. Por tanto S determina S_μ.

Si S es únicamente ergódico, S_μ es ergódico.

Relación entre ciclos de Schwartzman y de Ruelle-Sullivan

Teorema

Sea S un k-solenoide orientado y *únicamente ergódico*, y sea $f : S \to M$ una inmersión. (Si $k > 1$ asumimos que hay una trapping region.) Entonces para cada hoja $l \subset S$ tenemos que $f|_l : l \to M$ es un k-ciclo de Schwartzman, y que

$$[f|_l] = [f_* S_\mu] \in H_k(M, \mathbb{R}) .$$

Demostración.
El resultado es una aplicación del teorema ergódico de Birkhoff.

Relación entre ciclos de Schwartzman y de Ruelle-Sullivan

Teorema

Sea S un k-solenoide orientado y *únicamente ergódico*, y sea $f : S \to M$ una inmersión. (Si $k > 1$ asumimos que hay una trapping region.) Entonces para cada hoja $l \subset S$ tenemos que $f|_l : l \to M$ es un k-ciclo de Schwartzman, y que

$$[f|_l] = [f_* S_\mu] \in H_k(M, \mathbb{R}) .$$

Demostración.
El resultado es una aplicación del teorema ergódico de Birkhoff.

Relación entre ciclos de Schwartzman y de Ruelle-Sullivan

Teorema

Sea S un k-solenoide orientado y *únicamente ergódico*, y sea $f : S \to M$ una inmersión. (Si $k > 1$ asumimos que hay una trapping region.) Entonces para cada hoja $l \subset S$ tenemos que $f|_l : l \to M$ es un k-ciclo de Schwartzman, y que

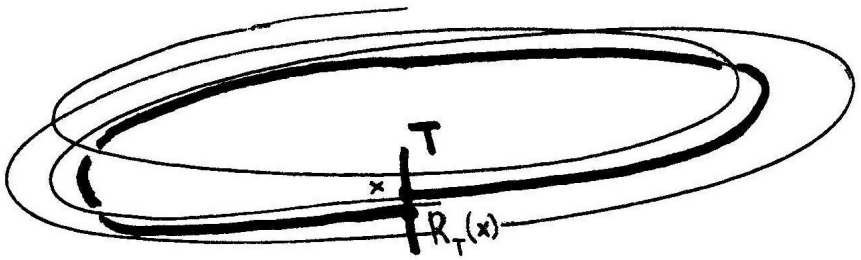
$$[f|_l] = [f_* S_\mu] \in H_k(M, \mathbb{R}) .$$

Demostración.
El resultado es una aplicación del teorema ergódico de Birkhoff.

Asumamos por simplicidad que $k = 1$, con lo que la hoja l es una curva parametrizada (por la longitud de arco) $c : \mathbb{R} \to S$.

Elegimos una transversal local T.

Sea $R_T : T \to T$, la aplicación de retorno de Poincaré.



Definimos $\varphi_T : T \to H_1(M, \mathbb{Z})$ por

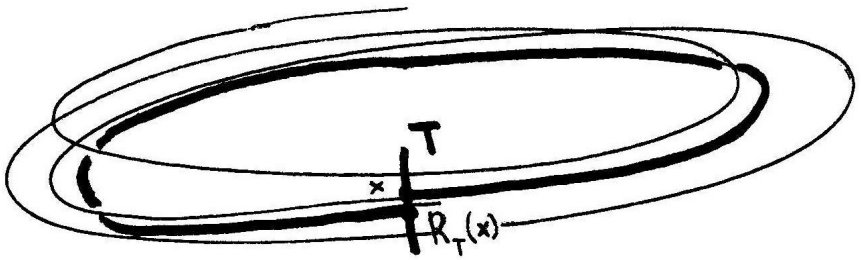
$$\varphi_T(x) = \left[f([x, R_T(x)]) * \text{segmento pequeño}\right] \in H_1(M, \mathbb{Z}).$$

También definimos $l_T : T \to \mathbb{R}_+$ por

$$l_T(x) = \text{longitud de } [x, R_T(x)].$$

Asumamos por simplicidad que $k = 1$, con lo que la hoja l es una curva parametrizada (por la longitud de arco) $c : \mathbb{R} \to S$. Elegimos una transversal local T.

Sea $R_T : T \to T$, la aplicación de retorno de Poincaré.



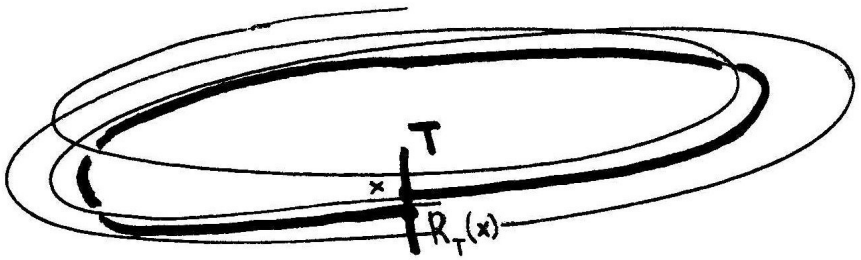
Definimos $\varphi_T : T \to H_1(M, \mathbb{Z})$ por

$$\varphi_T(x) = \left[f([x, R_T(x)]) * \text{segmento pequeño}\right] \in H_1(M, \mathbb{Z}).$$

También definimos $l_T : T \to \mathbb{R}_+$ por

$$l_T(x) = \text{longitud de } [x, R_T(x)].$$

Asumamos por simplicidad que $k = 1$, con lo que la hoja l es una curva parametrizada (por la longitud de arco) $c : \mathbb{R} \to S$.
Elegimos una transversal local T.
Sea $R_T : T \to T$, la aplicación de retorno de Poincaré.



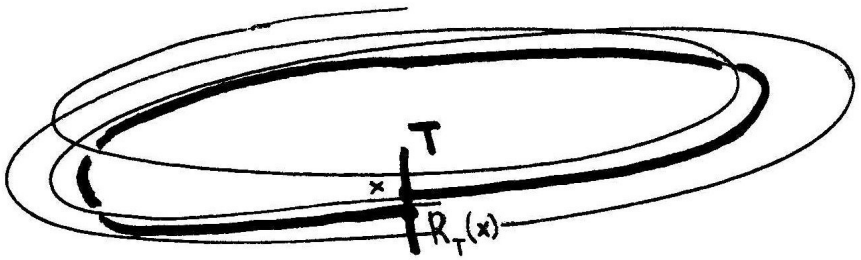
Definimos $\varphi_T : T \to H_1(M, \mathbb{Z})$ por

$$\varphi_T(x) = \left[f([x, R_T(x)]) * \text{segmento pequeño}\right] \in H_1(M, \mathbb{Z}).$$

También definimos $l_T : T \to \mathbb{R}_+$ por

$$l_T(x) = \text{longitud de } [x, R_T(x)].$$

Asumamos por simplicidad que $k = 1$, con lo que la hoja l es una curva parametrizada (por la longitud de arco) $c : \mathbb{R} \to S$.
Elegimos una transversal local T.
Sea $R_T : T \to T$, la aplicación de retorno de Poincaré.



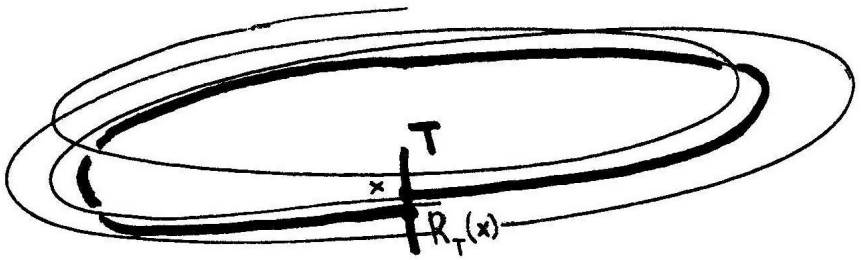
Definimos $\varphi_T : T \to H_1(M, \mathbb{Z})$ por

$$\varphi_T(x) = \left[f([x, R_T(x)]) * \text{segmento pequeño}\right] \in H_1(M, \mathbb{Z}).$$

También definimos $l_T : T \to \mathbb{R}_+$ por

$$l_T(x) = \text{longitud de } [x, R_T(x)].$$

Asumamos por simplicidad que $k = 1$, con lo que la hoja l es una curva parametrizada (por la longitud de arco) $c : \mathbb{R} \to S$.
Elegimos una transversal local T.
Sea $R_T : T \to T$, la aplicación de retorno de Poincaré.



Definimos $\varphi_T : T \to H_1(M, \mathbb{Z})$ por

$$\varphi_T(x) = \left[f([x, R_T(x)]) * \text{segmento pequeño}\right] \in H_1(M, \mathbb{Z}).$$

También definimos $l_T : T \to \mathbb{R}_+$ por

$$l_T(x) = \text{longitud de } [x, R_T(x)].$$

Fijemos $x_0 \in T$. Sea $x_i = R_T^i(x_0)$ con tiempo de llegada t_i. Claramente,

$$t_{i+1} - t_i = l_T(x_i)\,.$$

Por tanto,

$$t_n = \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} l_T(R_T^i(x_0))\,.$$

Por el teorema ergódico de Birkhoff,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} t_n = \int_T l_T(x)\, d\mu_T(x) = \mu(S) = 1\,. \qquad (1)$$

Fijemos $x_0 \in T$. Sea $x_i = R_T^i(x_0)$ con tiempo de llegada t_i. Claramente,

$$t_{i+1} - t_i = l_T(x_i)\,.$$

Por tanto,

$$t_n = \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} l_T(R_T^i(x_0))\,.$$

Por el teorema ergódico de Birkhoff,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} t_n = \int_T l_T(x)\, d\mu_T(x) = \mu(S) = 1\,. \qquad (1)$$

Fijemos $x_0 \in T$. Sea $x_i = R_T^i(x_0)$ con tiempo de llegada t_i. Claramente,

$$t_{i+1} - t_i = l_T(x_i)\,.$$

Por tanto,

$$t_n = \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} l_T(R_T^i(x_0))\,.$$

Por el teorema ergódico de Birkhoff,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} t_n = \int_T l_T(x)\, d\mu_T(x) = \mu(S) = 1\,. \qquad (1)$$

Fijemos $x_0 \in T$. Sea $x_i = R_T^i(x_0)$ con tiempo de llegada t_i. Claramente,

$$t_{i+1} - t_i = l_T(x_i)\,.$$

Por tanto,

$$t_n = \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} l_T(R_T^i(x_0))\,.$$

Por el teorema ergódico de Birkhoff,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} t_n = \int_T l_T(x)\, d\mu_T(x) = \mu(S) = 1\,. \tag{1}$$

También,

$$\begin{aligned}[f \circ c_{0,t_n}] &= [f \circ c_{0,t_1}] + [f \circ c_{t_1,t_2}] + \ldots + [f \circ c_{t_{n-1},t_n}] \\ &= \varphi_T(x_0) + \varphi_T(R_T(x_0)) + \ldots + \varphi_T(R_T^{n-1}(x_0))\,.\end{aligned}$$

De nuevo, por el teorema ergódico de Birkhoff,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}[f \circ c_{0,t_n}] = \int_T \varphi_T(x)\, d\mu_T(x) \in H_1(M,\mathbb{R})\,. \qquad (2)$$

También,

$$\begin{aligned}[f \circ c_{0,t_n}] &= [f \circ c_{0,t_1}] + [f \circ c_{t_1,t_2}] + \ldots + [f \circ c_{t_{n-1},t_n}] \\ &= \varphi_T(x_0) + \varphi_T(R_T(x_0)) + \ldots + \varphi_T(R_T^{n-1}(x_0))\,.\end{aligned}$$

De nuevo, por el teorema ergódico de Birkhoff,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}[f \circ c_{0,t_n}] = \int_T \varphi_T(x)\, d\mu_T(x) \in H_1(M,\mathbb{R})\,. \qquad (2)$$

Juntando (1) y (2), la clase de Schwartzman es$^{(*)}$

$$[f|_l] = \lim_{n\to+\infty} \frac{[f\circ c_{0,t_n}]}{t_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{[f\circ c_{0,t_n}]/n}{t_n/n} = \int_T \varphi_T(x)\, d\mu_T(x)\,.$$

$(*)$ Aquí tomamos $t\to\infty$. Podemos tomar $s\to-\infty$ de forma similar.

Por otro lado, la clase de Ruelle-Sullivan generalizada es

$$\langle [f_* S_\mu], \omega\rangle = \int_T \left(\int_{[x,R_T(x)]} f^*\omega \right) d\mu_T(x) = \int_T \langle \varphi_T(x), \omega\rangle d\mu_T(x)\,,$$

para $\omega\in\Omega^1(M)$. Luego

$$[f_* S_\mu] = \int_T \varphi_T(x)\, d\mu_T(x)\,.$$

Juntando (1) y (2), la clase de Schwartzman es$^{(*)}$

$$[f|_l] = \lim_{n\to+\infty} \frac{[f\circ c_{0,t_n}]}{t_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{[f\circ c_{0,t_n}]/n}{t_n/n} = \int_T \varphi_T(x)\, d\mu_T(x)\,.$$

$(*)$ Aquí tomamos $t\to\infty$. Podemos tomar $s\to-\infty$ de forma similar.

Por otro lado, la clase de Ruelle-Sullivan generalizada es

$$\langle [f_* S_\mu], \omega\rangle = \int_T \left(\int_{[x,R_T(x)]} f^*\omega \right) d\mu_T(x) = \int_T \langle \varphi_T(x), \omega\rangle d\mu_T(x)\,,$$

para $\omega\in\Omega^1(M)$. Luego

$$[f_* S_\mu] = \int_T \varphi_T(x)\, d\mu_T(x)\,.$$

Juntando (1) y (2), la clase de Schwartzman es$^{(*)}$

$$[f|_l] = \lim_{n\to+\infty} \frac{[f\circ c_{0,t_n}]}{t_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{[f\circ c_{0,t_n}]/n}{t_n/n} = \int_T \varphi_T(x)\, d\mu_T(x)\,.$$

$(*)$ Aquí tomamos $t\to\infty$. Podemos tomar $s\to-\infty$ de forma similar.

Por otro lado, la clase de Ruelle-Sullivan generalizada es

$$\langle [f_* S_\mu], \omega\rangle = \int_T \left(\int_{[x,R_T(x)]} f^*\omega \right) d\mu_T(x) = \int_T \langle \varphi_T(x), \omega\rangle d\mu_T(x)\,,$$

para $\omega\in\Omega^1(M)$. Luego

$$[f_* S_\mu] = \int_T \varphi_T(x)\, d\mu_T(x)\,.$$

Realización de clases de homología reales

Ahora pasamos al resultado principal de `arXiv:0910.2913`

Teorema

Sea M una variedad compacta y $a \in H_k(M, \mathbb{R})$. Entonces existe un k-solenoide inmerso, orientado y únicamente ergódico $f : S \to M$ representando la clase a. (Si $k > 1$ además podemos conseguir que S tenga una trapping region.)

Realización de clases de homología reales

Ahora pasamos al resultado principal de `arXiv:0910.2913`

Teorema

Sea M una variedad compacta y $a \in H_k(M, \mathbb{R})$. Entonces existe un k-solenoide inmerso, orientado y únicamente ergódico $f : S \to M$ representando la clase a. (Si $k > 1$ además podemos conseguir que S tenga una trapping region.)

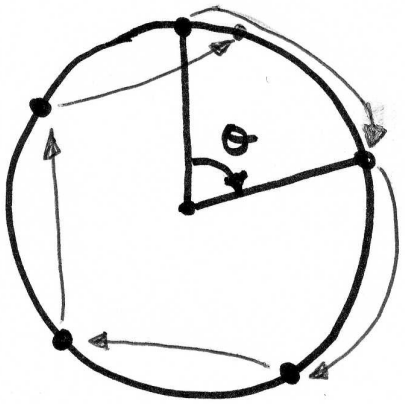
Demostración.

Asumamos de nuevo $k = 1$ por simplicidad.

Vamos a construir un solenoide requerido con transversal $T \subset S^1$.

Hecho

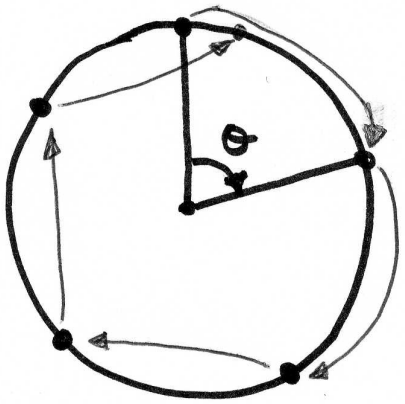
La rotación $r_\theta : S^1 \to S^1$ de ángulo irracional θ es únicamente ergódica.



Demostración.
Asumamos de nuevo $k = 1$ por simplicidad.
Vamos a construir un solenoide requerido con transversal $T \subset S^1$.

Hecho

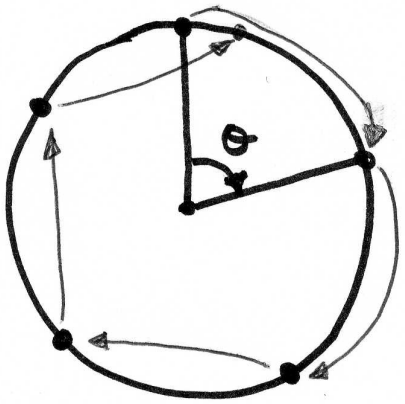
La rotación $r_\theta : S^1 \to S^1$ de ángulo irracional θ es únicamente ergódica.



Demostración.
Asumamos de nuevo $k = 1$ por simplicidad.
Vamos a construir un solenoide requerido con transversal $T \subset S^1$.

Hecho

La rotación $r_\theta : S^1 \to S^1$ de ángulo irracional θ es únicamente ergódica.

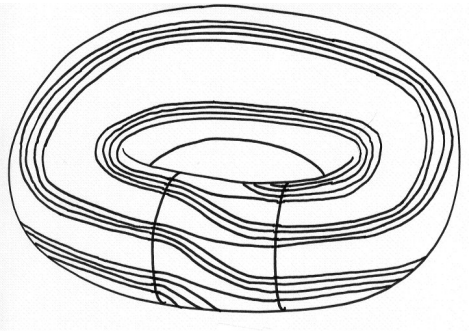


Ejemplo de Denjoy

Hay una aplicación $h : S^1 \to S^1$ que satisface:

- h es de clase $C^{2-\epsilon}$.
- h deja invariante un conjunto de Cantor $K \subset S^1$.
- h tiene ángulo de rotación θ, i.e. $r_\theta^n(x) = x + n\theta$, $h^n(x) = x + n\theta + o(n)$.
- h es únicamente ergódica, con una única medida invariante μ_K soportada en K.

La suspensión Σ_h de $h|_K : K \to K$ es:

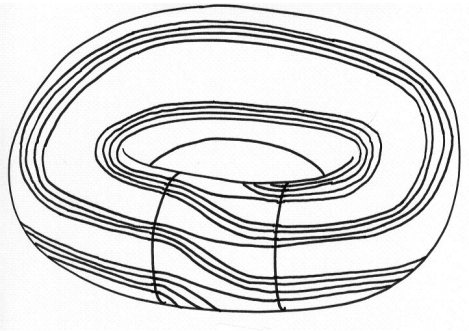


Ejemplo de Denjoy

Hay una aplicación $h : S^1 \to S^1$ que satisface:

- h es de clase $C^{2-\epsilon}$.
- h deja invariante un conjunto de Cantor $K \subset S^1$.
- h tiene ángulo de rotación θ, i.e. $r_\theta^n(x) = x + n\theta$, $h^n(x) = x + n\theta + o(n)$.
- h es únicamente ergódica, con una única medida invariante μ_K soportada en K.

La suspensión Σ_h de $h|_K : K \to K$ es:

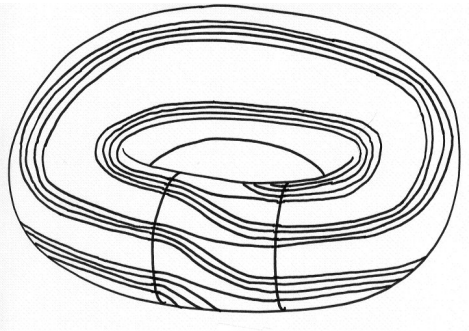


Ejemplo de Denjoy

Hay una aplicación $h : S^1 \to S^1$ que satisface:

- h es de clase $C^{2-\epsilon}$.
- h deja invariante un conjunto de Cantor $K \subset S^1$.
- h tiene ángulo de rotación θ, i.e. $r_\theta^n(x) = x + n\theta$, $h^n(x) = x + n\theta + o(n)$.
- h es únicamente ergódica, con una única medida invariante μ_K soportada en K.

La suspensión Σ_h de $h|_K : K \to K$ es:

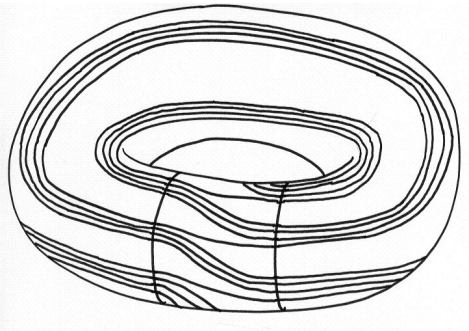


Ejemplo de Denjoy

Hay una aplicación $h : S^1 \to S^1$ que satisface:

- h es de clase $C^{2-\epsilon}$.
- h deja invariante un conjunto de Cantor $K \subset S^1$.
- h tiene ángulo de rotación θ, i.e. $r_\theta^n(x) = x + n\theta$, $h^n(x) = x + n\theta + o(n)$.
- h es únicamente ergódica, con una única medida invariante μ_K soportada en K.

La suspensión Σ_h de $h|_K : K \to K$ es:

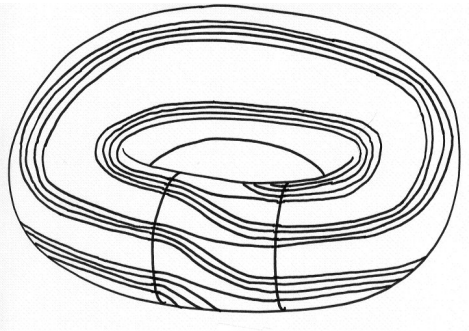


Ejemplo de Denjoy

Hay una aplicación $h : S^1 \to S^1$ que satisface:

- h es de clase $C^{2-\epsilon}$.
- h deja invariante un conjunto de Cantor $K \subset S^1$.
- h tiene ángulo de rotación θ, i.e. $r_\theta^n(x) = x + n\theta$, $h^n(x) = x + n\theta + o(n)$.
- h es únicamente ergódica, con una única medida invariante μ_K soportada en K.

La suspensión Σ_h de $h|_K : K \to K$ es:

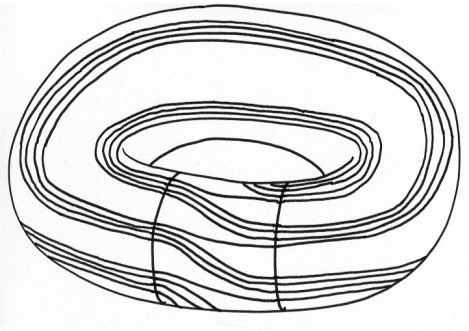


Ejemplo de Denjoy

Hay una aplicación $h : S^1 \to S^1$ que satisface:

- h es de clase $C^{2-\epsilon}$.
- h deja invariante un conjunto de Cantor $K \subset S^1$.
- h tiene ángulo de rotación θ, i.e. $r_\theta^n(x) = x + n\theta$, $h^n(x) = x + n\theta + o(n)$.
- h es únicamente ergódica, con una única medida invariante μ_K soportada en K.

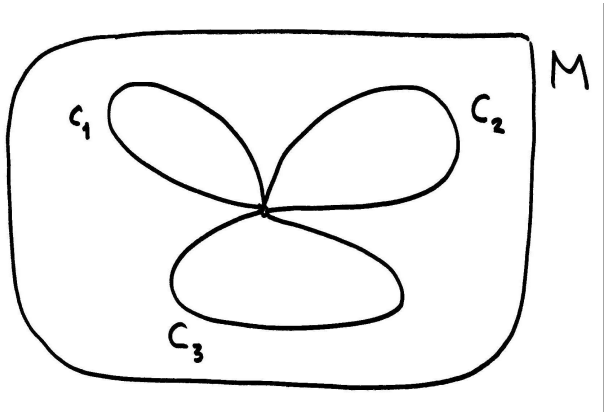
La suspensión Σ_h de $h|_K : K \to K$ es:



Tomemos lazos $C_1, \ldots, C_{b_1} \subset M$ que formen una base de $H_1(M, \mathbb{Z})$. Hay números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$ tales que

$$a = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_r C_r$$

(cambiando orientaciones y reordenando la base, si fuera necesario).
Dividiento por $\sum \lambda_i$, podemos asumir que $\sum \lambda_i = 1$.

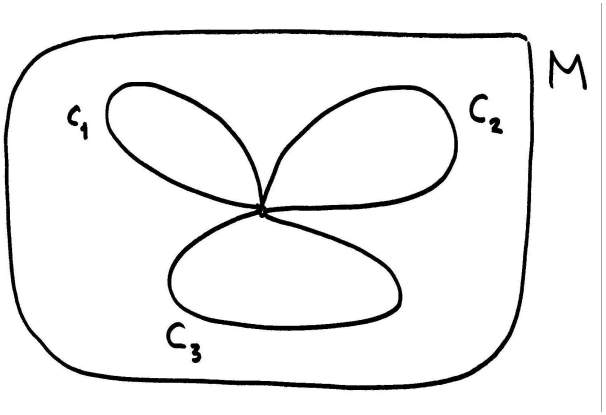


Tomemos lazos $C_1, \ldots, C_{b_1} \subset M$ que formen una base de $H_1(M, \mathbb{Z})$. Hay números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$ tales que

$$a = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_r C_r$$

(cambiando orientaciones y reordenando la base, si fuera necesario).

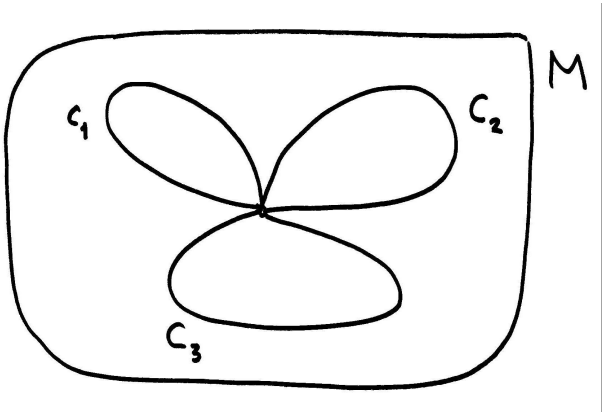
Dividiento por $\sum \lambda_i$, podemos asumir que $\sum \lambda_i = 1$.



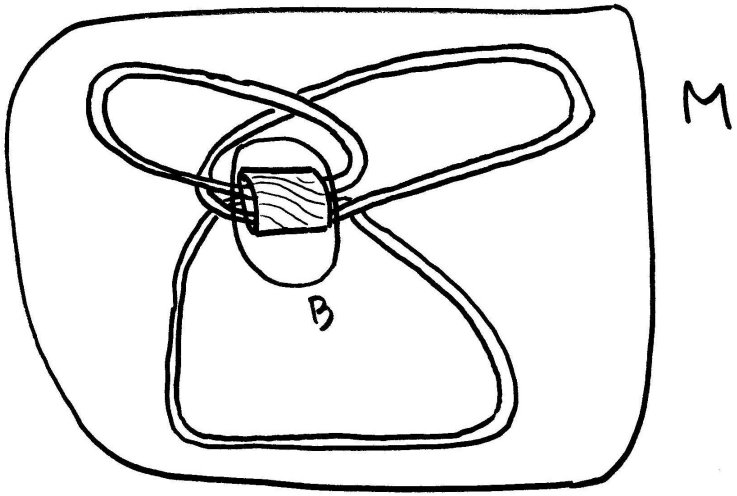
Tomemos lazos $C_1, \ldots, C_{b_1} \subset M$ que formen una base de $H_1(M, \mathbb{Z})$. Hay números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$ tales que

$$a = \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_r C_r$$

(cambiando orientaciones y reordenando la base, si fuera necesario).
Dividiento por $\sum \lambda_i$, podemos asumir que $\sum \lambda_i = 1$.

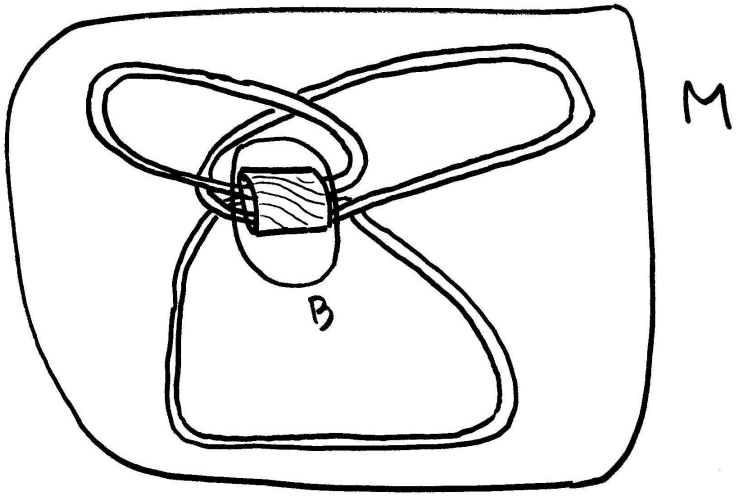


Supongamos que $\dim M \geq 3$. Podemos embeber $S^1 \times [0,1] \subset B$ en una bola de M. Partimos el conjunto de Cantor K en r conjuntos cerrados disjuntos $K_1, \ldots, K_r$ (en orden cíclico), tales que $\mu_K(K_i) = \lambda_i$.
Hacemos la siguiente construcción: la parte central de Σ_h la enviamos a la bola B. Desde su borde, tomamos bandas $[0,1] \times K_i$ tales que cada hoja $[0,1] \times \{y\}$ es homotópica a C_i.

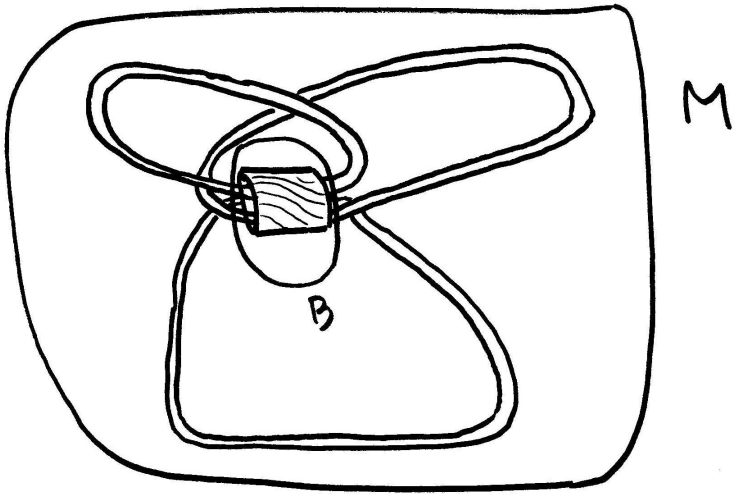


Supongamos que $\dim M \geq 3$. Podemos embeber $S^1 \times [0,1] \subset B$ en una bola de M. Partimos el conjunto de Cantor K en r conjuntos cerrados disjuntos $K_1, \ldots, K_r$ (en orden cíclico), tales que $\mu_K(K_i) = \lambda_i$.

Hacemos la siguiente construcción: la parte central de Σ_h la enviamos a la bola B. Desde su borde, tomamos bandas $[0,1] \times K_i$ tales que cada hoja $[0,1] \times \{y\}$ es homotópica a C_i.



Supongamos que $\dim M \geq 3$. Podemos embeber $S^1 \times [0,1] \subset B$ en una bola de M. Partimos el conjunto de Cantor K en r conjuntos cerrados disjuntos $K_1, \ldots, K_r$ (en orden cíclico), tales que $\mu_K(K_i) = \lambda_i$.
Hacemos la siguiente construcción: la parte central de Σ_h la enviamos a la bola B. Desde su borde, tomamos bandas $[0,1] \times K_i$ tales que cada hoja $[0,1] \times \{y\}$ es homotópica a C_i.



El solenoide resultante S es únicamente ergódico, pues la holonomía es h.

Veamos que $[S_\mu, f] = a$. Sea ω una 1-forma cerrada (podemos asumir que ω se anula en B). Recubramos el solenoide con las siguientes cajas: por un lado la parte central $B \cap S$, y por otro las bandas $[0,1] \times K_i$, $i = 1, \ldots, r$. Entonces

$$\langle (f_* S_\mu), [\omega] \rangle = \sum_{i=1}^{r} \int_{K_i} \left(\int_{[0,1]} f^* \omega \right) d\mu_{K_i}(y) = \sum_{i=1}^{r} \int_{K_i} \langle C_i, [\omega] \rangle d\mu_{K_i}(y)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \langle C_i, [\omega] \rangle \mu(K_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle C_i, [\omega] \rangle = \langle a, [\omega] \rangle .$$

Luego $[f_* S_\mu] = a$.

El solenoide resultante S es únicamente ergódico, pues la holonomía es h.

Veamos que $[S_\mu, f] = a$. Sea ω una 1-forma cerrada (podemos asumir que ω se anula en B). Recubramos el solenoide con las siguientes cajas: por un lado la parte central $B \cap S$, y por otro las bandas $[0,1] \times K_i$, $i = 1, \ldots, r$. Entonces

$$\langle (f_* S_\mu), [\omega] \rangle = \sum_{i=1}^{r} \int_{K_i} \left(\int_{[0,1]} f^* \omega \right) d\mu_{K_i}(y) = \sum_{i=1}^{r} \int_{K_i} \langle C_i, [\omega] \rangle d\mu_{K_i}(y)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \langle C_i, [\omega] \rangle \mu(K_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle C_i, [\omega] \rangle = \langle a, [\omega] \rangle .$$

Luego $[f_* S_\mu] = a$.

El solenoide resultante S es únicamente ergódico, pues la holonomía es h.
Veamos que $[S_\mu, f] = a$. Sea ω una 1-forma cerrada (podemos asumir que ω se anula en B). Recubramos el solenoide con las siguientes cajas: por un lado la parte central $B \cap S$, y por otro las bandas $[0,1] \times K_i$, $i = 1, \ldots, r$. Entonces

$$\langle (f_* S_\mu), [\omega] \rangle = \sum_{i=1}^{r} \int_{K_i} \left(\int_{[0,1]} f^* \omega \right) d\mu_{K_i}(y) = \sum_{i=1}^{r} \int_{K_i} \langle C_i, [\omega] \rangle d\mu_{K_i}(y)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \langle C_i, [\omega] \rangle \mu(K_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle C_i, [\omega] \rangle = \langle a, [\omega] \rangle .$$

Luego $[f_* S_\mu] = a$.

El solenoide resultante S es únicamente ergódico, pues la holonomía es h.
Veamos que $[S_\mu, f] = a$. Sea ω una 1-forma cerrada (podemos asumir que ω se anula en B). Recubramos el solenoide con las siguientes cajas: por un lado la parte central $B \cap S$, y por otro las bandas $[0,1] \times K_i$, $i = 1, \ldots, r$. Entonces

$$\langle (f_* S_\mu), [\omega] \rangle = \sum_{i=1}^{r} \int_{K_i} \left(\int_{[0,1]} f^* \omega \right) d\mu_{K_i}(y) = \sum_{i=1}^{r} \int_{K_i} \langle C_i, [\omega] \rangle d\mu_{K_i}(y)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \langle C_i, [\omega] \rangle \mu(K_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle C_i, [\omega] \rangle = \langle a, [\omega] \rangle .$$

Luego $[f_* S_\mu] = a$.

El solenoide resultante S es únicamente ergódico, pues la holonomía es h.
Veamos que $[S_\mu, f] = a$. Sea ω una 1-forma cerrada (podemos asumir que ω se anula en B). Recubramos el solenoide con las siguientes cajas: por un lado la parte central $B \cap S$, y por otro las bandas $[0,1] \times K_i$, $i = 1, \ldots, r$. Entonces

$$\langle (f_* S_\mu), [\omega] \rangle = \sum_{i=1}^{r} \int_{K_i} \left(\int_{[0,1]} f^* \omega \right) d\mu_{K_i}(y) = \sum_{i=1}^{r} \int_{K_i} \langle C_i, [\omega] \rangle d\mu_{K_i}(y)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \langle C_i, [\omega] \rangle \mu(K_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle C_i, [\omega] \rangle = \langle a, [\omega] \rangle .$$

Luego $[f_* S_\mu] = a$.

El solenoide resultante S es únicamente ergódico, pues la holonomía es h.
Veamos que $[S_\mu, f] = a$. Sea ω una 1-forma cerrada (podemos asumir que ω se anula en B). Recubramos el solenoide con las siguientes cajas: por un lado la parte central $B \cap S$, y por otro las bandas $[0,1] \times K_i$, $i = 1, \ldots, r$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle (f_* S_\mu), [\omega] \rangle &= \sum_{i=1}^{r} \int_{K_i} \left(\int_{[0,1]} f^* \omega \right) d\mu_{K_i}(y) = \sum_{i=1}^{r} \int_{K_i} \langle C_i, [\omega] \rangle d\mu_{K_i}(y) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \langle C_i, [\omega] \rangle \mu(K_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle C_i, [\omega] \rangle = \langle a, [\omega] \rangle \,.\end{aligned}$$

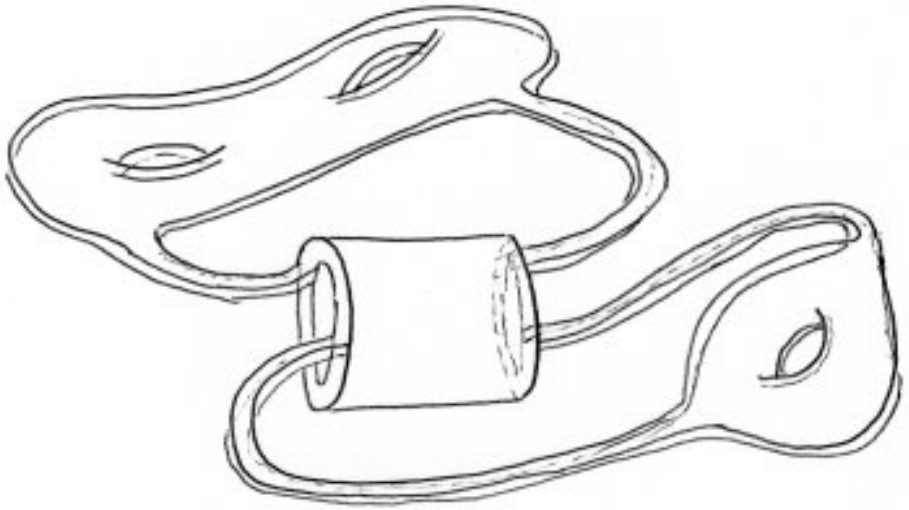
Luego $[f_* S_\mu] = a$.

Si $k > 1$, usamos subvariedades

$$C_i \subset M$$

representando clases de homología entera, que den una base de $H_k(M, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \otimes H_k(M, \mathbb{Z})$, y una parte central (donde ocurre la holonomía) de la forma

$$S^{k-1} \times S^1 \times [0, 1] \subset B \subset M.$$



Conjetura de Hodge solenoidal

Conjetura

Sea M una variedad compacta Kähler, y $a \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{R})$. Entonces a se puede representar por un solenoide complejo inmerso.

Comentarios:

- Es una mitad de la conjetura de Hodge (la segunda parte consiste en probar que si a es entera, entonces el solenoide es una variedad).
- No tenemos ahora la restricción de que M sea una variedad proyectiva (es decir, que la forma Kähler verifique que $[\Omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$).
- La conjetura es cierta para toros complejos (usando solenoides complejos no minimales).

Conjetura de Hodge solenoidal

Conjetura

Sea M una variedad compacta Kähler, y $a \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{R})$. Entonces a se puede representar por un solenoide complejo inmerso.

Comentarios:

- Es una mitad de la conjetura de Hodge (la segunda parte consiste en probar que si a es entera, entonces el solenoide es una variedad).
- No tenemos ahora la restricción de que M sea una variedad proyectiva (es decir, que la forma Kähler verifique que $[\Omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$).
- La conjetura es cierta para toros complejos (usando solenoides complejos no minimales).

Conjetura de Hodge solenoidal

Conjetura

Sea M una variedad compacta Kähler, y $a \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{R})$. Entonces a se puede representar por un solenoide complejo inmerso.

Comentarios:

- Es una mitad de la conjetura de Hodge (la segunda parte consiste en probar que si a es entera, entonces el solenoide es una variedad).
- No tenemos ahora la restricción de que M sea una variedad proyectiva (es decir, que la forma Kähler verifique que $[\Omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$).
- La conjetura es cierta para toros complejos (usando solenoides complejos no minimales).

Conjetura de Hodge solenoidal

Conjetura

Sea M una variedad compacta Kähler, y $a \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{R})$. Entonces a se puede representar por un solenoide complejo inmerso.

Comentarios:

- Es una mitad de la conjetura de Hodge (la segunda parte consiste en probar que si a es entera, entonces el solenoide es una variedad).
- No tenemos ahora la restricción de que M sea una variedad proyectiva (es decir, que la forma Kähler verifique que $[\Omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$).
- La conjetura es cierta para toros complejos (usando solenoides complejos no minimales).

Conjetura de Hodge solenoidal

Conjetura

Sea M una variedad compacta Kähler, y $a \in H^{p,p}(M) \cap H^{2p}(M, \mathbb{R})$. Entonces a se puede representar por un solenoide complejo inmerso.

Comentarios:

- Es una mitad de la conjetura de Hodge (la segunda parte consiste en probar que si a es entera, entonces el solenoide es una variedad).
- No tenemos ahora la restricción de que M sea una variedad proyectiva (es decir, que la forma Kähler verifique que $[\Omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$).
- La conjetura es cierta para toros complejos (usando solenoides complejos no minimales).

Densidad de las corrientes solenoidales

Teorema

Sea M una variedad compacta y $\alpha \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada. Entonces existe un solenoide orientado, únicamente ergódico, inmerso $f : S_\mu \to M$ con $[f_* S_\mu] = [\alpha]$, y tal que la corriente $(f_* S_\mu)$ está tan próxima a α como queramos.

Demostración.
Empezamos tomando un solenoide ergódico cualquiera S_μ con $[f_* S_\mu] = [\alpha]$.
La corriente $f_* S_\mu - \alpha$ es exacta, $f_* S_\mu - \alpha = dT$.
Tomemos una $(k-1)$-forma $\beta \sim T$.

Densidad de las corrientes solenoidales

Teorema

Sea M una variedad compacta y $\alpha \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada. Entonces existe un solenoide orientado, únicamente ergódico, inmerso $f : S_\mu \to M$ con $[f_* S_\mu] = [\alpha]$, y tal que la corriente $(f_* S_\mu)$ está tan próxima a α como queramos.

Demostración.
Empezamos tomando un solenoide ergódico cualquiera S_μ con $[f_* S_\mu] = [\alpha]$.
La corriente $f_* S_\mu - \alpha$ es exacta, $f_* S_\mu - \alpha = dT$.
Tomemos una $(k-1)$-forma $\beta \sim T$.

Densidad de las corrientes solenoidales

Teorema

Sea M una variedad compacta y $\alpha \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada. Entonces existe un solenoide orientado, únicamente ergódico, inmerso $f : S_\mu \to M$ con $[f_* S_\mu] = [\alpha]$, y tal que la corriente $(f_* S_\mu)$ está tan próxima a α como queramos.

Demostración.
Empezamos tomando un solenoide ergódico cualquiera S_μ con $[f_* S_\mu] = [\alpha]$.
La corriente $f_* S_\mu - \alpha$ es exacta, $f_* S_\mu - \alpha = dT$.
Tomemos una $(k-1)$-forma $\beta \sim T$.

Densidad de las corrientes solenoidales

Teorema

Sea M una variedad compacta y $\alpha \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada. Entonces existe un solenoide orientado, únicamente ergódico, inmerso $f : S_\mu \to M$ con $[f_* S_\mu] = [\alpha]$, y tal que la corriente $(f_* S_\mu)$ está tan próxima a α como queramos.

Demostración.
Empezamos tomando un solenoide ergódico cualquiera S_μ con $[f_* S_\mu] = [\alpha]$.
La corriente $f_* S_\mu - \alpha$ es exacta, $f_* S_\mu - \alpha = dT$.
Tomemos una $(k-1)$-forma $\beta \sim T$.

Densidad de las corrientes solenoidales

Teorema

Sea M una variedad compacta y $\alpha \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada. Entonces existe un solenoide orientado, únicamente ergódico, inmerso $f : S_\mu \to M$ con $[f_* S_\mu] = [\alpha]$, y tal que la corriente $(f_* S_\mu)$ está tan próxima a α como queramos.

Demostración.
Empezamos tomando un solenoide ergódico cualquiera S_μ con $[f_* S_\mu] = [\alpha]$.
La corriente $f_* S_\mu - \alpha$ es exacta, $f_* S_\mu - \alpha = dT$.
Tomemos una $(k-1)$-forma $\beta \sim T$.

Sea (ρ_i) una partición de la unidad subordinada a un recubrimiento por abiertos coordenados (U_i).

$$d\beta = \sum d(\rho_i \beta).$$

En el abierto coordenado U_i, tenemos que
$\rho_i \beta = \sum f_J dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_{k-1}}$.
Luego $d(\rho_i \beta) = \sum df_J \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_{k-1}}$.
Por tanto podemos escribir

$$f_* S_\mu - \alpha = dT \sim d\beta$$

Como una suma de k-formas del tipo $df_1 \wedge \ldots \wedge df_k$, donde

$$F = (f_1, \ldots, f_k) : M \to \mathbb{R}$$

Sea (ρ_i) una partición de la unidad subordinada a un recubrimiento por abiertos coordenados (U_i).

$$d\beta = \sum d(\rho_i \beta).$$

En el abierto coordenado U_i, tenemos que
$\rho_i \beta = \sum f_J dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_{k-1}}$.
Luego $d(\rho_i \beta) = \sum df_J \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_{k-1}}$.
Por tanto podemos escribir

$$f_* S_\mu - \alpha = dT \sim d\beta$$

Como una suma de k-formas del tipo $df_1 \wedge \ldots \wedge df_k$, donde

$$F = (f_1, \ldots, f_k) : M \to \mathbb{R}$$

Sea (ρ_i) una partición de la unidad subordinada a un recubrimiento por abiertos coordenados (U_i).

$$d\beta = \sum d(\rho_i \beta).$$

En el abierto coordenado U_i, tenemos que $\rho_i \beta = \sum f_J dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_{k-1}}$.
Luego $d(\rho_i \beta) = \sum df_J \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_{k-1}}$.
Por tanto podemos escribir

$$f_* S_\mu - \alpha = dT \sim d\beta$$

Como una suma de k-formas del tipo $df_1 \wedge \ldots \wedge df_k$, donde

$$F = (f_1, \ldots, f_k) : M \to \mathbb{R}$$

Sea (ρ_i) una partición de la unidad subordinada a un recubrimiento por abiertos coordenados (U_i).

$$d\beta = \sum d(\rho_i \beta).$$

En el abierto coordenado U_i, tenemos que
$\rho_i \beta = \sum f_J dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_{k-1}}$.
Luego $d(\rho_i \beta) = \sum df_J \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_{k-1}}$.
Por tanto podemos escribir

$$f_* S_\mu - \alpha = dT \sim d\beta$$

Como una suma de k-formas del tipo $df_1 \wedge \ldots \wedge df_k$, donde

$$F = (f_1, \ldots, f_k) : M \to \mathbb{R}$$

Sea (ρ_i) una partición de la unidad subordinada a un recubrimiento por abiertos coordenados (U_i).

$$d\beta = \sum d(\rho_i \beta).$$

En el abierto coordenado U_i, tenemos que
$\rho_i \beta = \sum f_J dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_{k-1}}$.
Luego $d(\rho_i \beta) = \sum df_J \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_{k-1}}$.
Por tanto podemos escribir

$$f_* S_\mu - \alpha = dT \sim d\beta$$

Como una suma de k-formas del tipo $df_1 \wedge \ldots \wedge df_k$, donde

$$F = (f_1, \ldots, f_k) : M \to \mathbb{R}$$

$\gamma = df_1 \wedge \ldots \wedge df_k = F^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k)$.

De hecho, F determina una foliación (de codimensión k) en un abierto de M, con medida transversa $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$.

Tomamos una medida μ soportada en un Cantor K, que sólo contenga puntos regulares de F, y que aproxime la medida ω en la imagen de F.

$F^*\mu \sim F^*\omega$, y es la medida de una laminación (i.e. solenoide) que está dada por las fibras de F sobre K.

Finalmente hacemos una cirugía que una las hojas de S_μ con las de $F^{-1}(K)$, que preserve la holonomía únicamente ergódica, y con zona de cirugía de volumen pequeño. Así obtenemos un solenoide S'_μ requerido.

$\gamma = df_1 \wedge \ldots \wedge df_k = F^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k)$.
De hecho, F determina una foliación (de codimensión k) en un abierto de M, con medida transversa $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$.
Tomamos una medida μ soportada en un Cantor K, que sólo contenga puntos regulares de F, y que aproxime la medida ω en la imagen de F.
$F^*\mu \sim F^*\omega$, y es la medida de una laminación (i.e. solenoide) que está dada por las fibras de F sobre K.
Finalmente hacemos una cirugía que una las hojas de S_μ con las de $F^{-1}(K)$, que preserve la holonomía únicamente ergódica, y con zona de cirugía de volumen pequeño. Así obtenemos un solenoide S'_μ requerido.

$\gamma = df_1 \wedge \ldots \wedge df_k = F^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k)$.
De hecho, F determina una foliación (de codimensión k) en un abierto de M, con medida transversa $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$.
Tomamos una medida μ soportada en un Cantor K, que sólo contenga puntos regulares de F, y que aproxime la medida ω en la imagen de F.
$F^*\mu \sim F^*\omega$, y es la medida de una laminación (i.e. solenoide) que está dada por las fibras de F sobre K.
Finalmente hacemos una cirugía que una las hojas de S_μ con las de $F^{-1}(K)$, que preserve la holonomía únicamente ergódica, y con zona de cirugía de volumen pequeño. Así obtenemos un solenoide S'_μ requerido.

$\gamma = df_1 \wedge \ldots \wedge df_k = F^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k)$.
De hecho, F determina una foliación (de codimensión k) en un abierto de M, con medida transversa $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$.
Tomamos una medida μ soportada en un Cantor K, que sólo contenga puntos regulares de F, y que aproxime la medida ω en la imagen de F.
$F^*\mu \sim F^*\omega$, y es la medida de una laminación (i.e. solenoide) que está dada por las fibras de F sobre K.
Finalmente hacemos una cirugía que una las hojas de S_μ con las de $F^{-1}(K)$, que preserve la holonomía únicamente ergódica, y con zona de cirugía de volumen pequeño. Así obtenemos un solenoide S'_μ requerido.

$\gamma = df_1 \wedge \ldots \wedge df_k = F^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k)$.
De hecho, F determina una foliación (de codimensión k) en un abierto de M, con medida transversa $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$.
Tomamos una medida μ soportada en un Cantor K, que sólo contenga puntos regulares de F, y que aproxime la medida ω en la imagen de F.
$F^*\mu \sim F^*\omega$, y es la medida de una laminación (i.e. solenoide) que está dada por las fibras de F sobre K.
Finalmente hacemos una cirugía que una las hojas de S_μ con las de $F^{-1}(K)$, que preserve la holonomía únicamente ergódica, y con zona de cirugía de volumen pequeño. Así obtenemos un solenoide S'_μ requerido.

$\gamma = df_1 \wedge \ldots \wedge df_k = F^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k)$.
De hecho, F determina una foliación (de codimensión k) en un abierto de M, con medida transversa $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$.
Tomamos una medida μ soportada en un Cantor K, que sólo contenga puntos regulares de F, y que aproxime la medida ω en la imagen de F.
$F^*\mu \sim F^*\omega$, y es la medida de una laminación (i.e. solenoide) que está dada por las fibras de F sobre K.
Finalmente hacemos una cirugía que una las hojas de S_μ con las de $F^{-1}(K)$, que preserve la holonomía únicamente ergódica, y con zona de cirugía de volumen pequeño. Así obtenemos un solenoide S'_μ requerido.

$\gamma = df_1 \wedge \ldots \wedge df_k = F^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k)$.
De hecho, F determina una foliación (de codimensión k) en un abierto de M, con medida transversa $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$.
Tomamos una medida μ soportada en un Cantor K, que sólo contenga puntos regulares de F, y que aproxime la medida ω en la imagen de F.
$F^*\mu \sim F^*\omega$, y es la medida de una laminación (i.e. solenoide) que está dada por las fibras de F sobre K.
Finalmente hacemos una cirugía que una las hojas de S_μ con las de $F^{-1}(K)$, que preserve la holonomía únicamente ergódica, y con zona de cirugía de volumen pequeño. Así obtenemos un solenoide S'_μ requerido.