XVI ENCUENTRO DE TOPOLOGÍA
Universidad de Almería
23 y 24 de octubre de 2009

Distinción de Grupos mediante Autoequivalencias de Espacios

Sergio Huerta Lara (Universidad de Málaga)

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Introducción

Para un objeto X de cualquier categoría $\mathcal{C}$, es importante el estudio del grupo de morfismos $f : X \longrightarrow X$ que son equivalencias. En el caso de la categoría homotópica de espacios topológicos punteados el grupo $\mathcal{E}(X)$ se llama **grupo de autoequivalencias de homotopía**. Podemos considerarlo como el grupo de simetrías "salvo homotopía" del espacio.

Todas las esferas tienen por grupo de autoequivalencias de homotopía un grupo cíclico de orden 2, C_2. Un ejemplo que nos va a interesar más son los espacios de Eilenberg-MacLane, aquellos que sólo tienen un grupo de homotopía no trivial. En estos casos el grupo de autoequivalencias de homotopía son los automorfismos de este grupo no trivial; $\mathcal{E}(K(G,n)) = Aut(G)$.

Un problema clásico en cualquier categoría es el problema de isomorfía. Este problema consiste en dar un algoritmo que determine cuando dos objetos en una categoría son equivalentes. Vamos a aproximarnos al problema de isomorfía de grupos finitos mediante teoría de homotopía; en concreto con el grupo de autoequivalencias de homotopía.

Un par de Definiciones

Con estos objetivos en mente, definimos el epsilon género de un grupo G como el conjunto de clases de homotopía de espacios en los que G "actúa homotópicamente":

$$\mathcal{E}\text{-gen}(G) = \{[X] |\ \text{existe } f : G \longrightarrow \mathcal{E}(X) \text{ no nula}\}.$$

Esta definición no es útil para grupos infinitos; ya que por ejemplo los grupos libres con 2 y 3 generadores tienen asociados el mismo conjunto de espacios. Es por ello que nos centramos en grupos finitos.

$\mathcal{E}$-gen(G) siempre es un conjunto no vacío; en efecto, todo grupo G se puede embeber en un grupo simétrico de algún determinado grado n y Σ_n actúa sobre la unión puntual de n esferas mediante permutación.

De hecho esta acción es fiel. Aunque no toda acción es fiel, basta pensar en las esferas y cualquier grupo que se proyecte en un C_2 ($A_n \lhd \Sigma_n$). Destacamos así un subconjunto de $\mathcal{E}$-gen(G):

$$\mathcal{E}\text{-gen-iny}(G) = \{[X] |\ \exists f : G \longrightarrow \mathcal{E}(X) \text{ inyectiva}\}.$$

Y un par de Aplicaciones

Como primera aplicación veremos un resultado que involucra muy pocos conocimientos sobre el grupo de autoequivalencias; de hecho todo lo que hace falta saber sobre este grupo es que $\mathcal{E}(K(C_p, n)) = Aut(C_p) = C_{p-1}$ con p primo.

Para grupos nilpotentes siempre hay una proyección en C_p con p primo si y sólo si p divide al orden del grupo; ya que todo subgrupo maximal es normal. Aprovechando este resultado vamos a ver como podemos distinguir dos grupos si sus ordenes no son divididos por los mismos primos usando $\mathcal{E}$-gen(G).

Partiendo de un primo p_0 que divide al orden de H, pero no al de G; y de los primos que dividen al orden de G: $\{p_1, \ldots, p_n\}$; podemos encontrar un primo q cumpliendo $p_0 | q-1$ (▼) y $p_i \not| q-1$ (♦). La existencia de tal primo q se puede probar usando el teorema chino de los restos y la existencia de infinitos primos en las progresiones aritméticas de Dirichlet.

Ahora es cuando entran en juego los espacios de Eilenberg-MacLane. Gracias a (▼) podemos garantizar que $K(C_q)$ pertenece a $\mathcal{E}$-gen(H); y, (♦) nos permite asegurar que $K(C_q)$ no pertenece a $\mathcal{E}$-gen(G).

En concreto;

Teorema Sean G y H grupos finitos nilpotentes. Si $\mathcal{E}$-gen$(G) = \mathcal{E}$-gen(H) entonces $\forall p$ primo $p | \sharp G \Leftrightarrow p | \sharp H$.

Veamos ahora como $\mathcal{E}$-gen-iny(G) nos permite resultados más próximos al problema de isomorfía. En realidad también usaremos herramientas más potentes que las autoequivalencias de los espacios de Eilenberg-MacLane.

Con el siguiente resultado sobre realización del grupo de autoequivalencias podemos prácticamente distinguir con que grupo estamos tratando.

Teorema Sea G un grupo finito. Sea $n \in \mathbb{N}$. Existe A subgrupo de $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ y espacio topológico X_G tal que

$$\mathcal{E}(X_G) = A \times G.$$

Ahora, el análisis de las clases de isomorfía de los subgrupos finitos de $A \times G$ hace el resto. Podemos enunciar:

Teorema Sean G y H dos grupos finitos cumpliendo

$$\mathcal{E}\text{-gen-iny}(G) = \mathcal{E}\text{-gen-iny}(H).$$

Entonces $G = C_2 \times H$, ó $H = C_2 \times G$; o bien $G = H$.

Trabajo conjunto con Antonio Viruel

Referencias

- Rutter, John W. *Spaces of homotopy self-equivalences. A survey.* Lecture Notes in Mathematics, 1662. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- Arkowitz, Martin *The group of self-homotopy equivalences — a survey.* Lecture Notes in Math., 1425, Springer, Berlin, 1990