Aspectos topológicos de la conjetura de Baum–Connes

Rubén Sánchez García

Mathematisches Institut
HHU Düsseldorf (Alemania)

XVI Encuentro de Topología
Universidad de Almería

Acciones de grupos

G grupo discreto

Idea clásica

Estudiar G mediante su acción en objeto X.
Recíprocamente: dado X, estudiar $G \leq \mathrm{Aut}(X)$.

- X conjunto $\rightsquigarrow$ Teoría de permutaciones
- X espacio topológico $\rightsquigarrow$ Grupos de transformaciones
- X espacio métrico $\rightsquigarrow$ Teoría geométrica de grupos
- X espacio vectorial $\rightsquigarrow$ Teoría de representaciones

Primeras ideas

1. G actúa mediante multiplicación en sí mismo
   $L_g\colon g \mapsto gx$ $\qquad$ G como conjunto
2. $G = \langle S \mid R \rangle$ presentación con $1 \notin S$
   $d(1, g) = \text{mín}\{k \text{ tal que } g = s_1 \dots s_k,\ s_i \in S^{\pm 1}\}$
   $d(g, h) = d(1, g^{-1}h)$

   G como espacio métrico discreto $\qquad$ $\underset{g}{\bullet}$ $\qquad$ $\underset{gs_i}{\bullet}$

3. espacio geodésico: $\underset{g}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{gs_i}{\bullet}$ $\qquad$ $s_i \in S^{\pm 1}$

   vértices = $g \in G$ $\quad$ aristas = (ver arriba) $\quad$ grafo de Cayley
   cada relación $r \in R$ determina un lazo $\Rightarrow$ añadir 2-celda

   complejo de Cayley: CW-complejo, dim. 2, simpl. conexo $\mathcal{C}$

   G-acción: $\underset{g'g}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{g'gs_i}{\bullet}$ $\qquad$ libre $\ \text{stab}_G(x) = \{1\}$
   $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ recubridor universal $\Rightarrow \pi_1(\mathcal{C}/G) \cong G$

Construcción functorial

Problema

La construcción depende de la presentación elegida.
Por ejemplo, $\langle a \mid a^2, a^3 \rangle$ es el grupo trivial, pero $\pi_2(\mathcal{C}) \neq 0$.

Solución

Añadir celdas para eliminar los grupos de homotopía superiores de $\mathcal{C}$.

Resultado

G-CW-complejo X *libre* y *contráctil*.
$X \to X/G$ es un espacio recubridor universal y

$$\pi_i(X/G) = \begin{cases} G & i = 1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases}$$

Notación: $X = EG$, $X/G = BG$.

Definición y propiedad universal

Definición

EG es un G-CW-complejo X *libre* y *contráctil*, llamado el espacio universal para acciones libres.

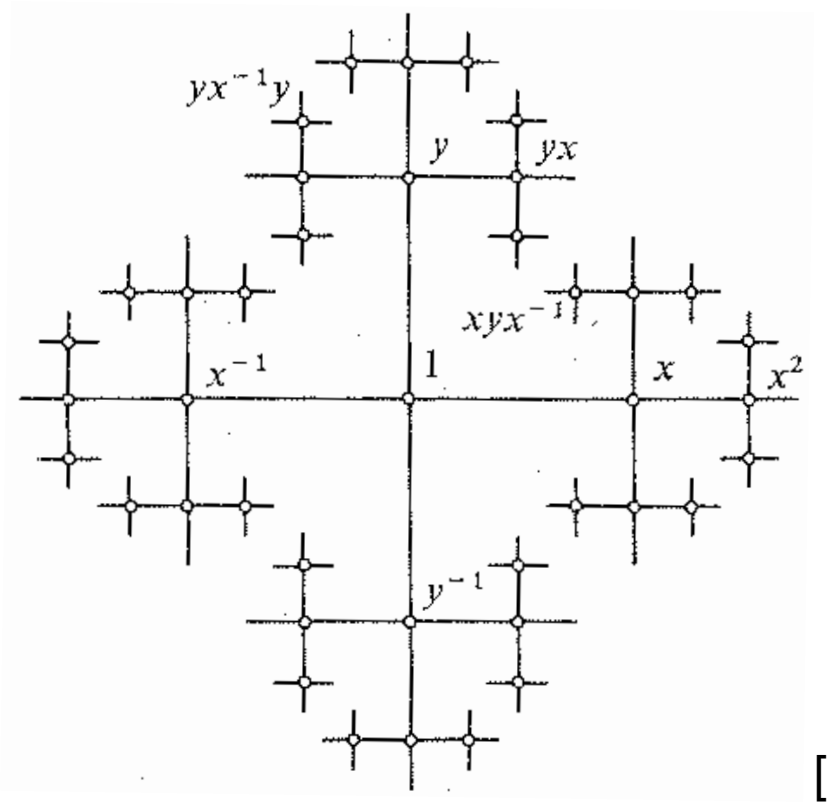
Propiedad universal de EG

Para todo G-CW-complejo libre Y, existe una G-función $Y \to EG$ única salvo G-homotopía. (Objeto final)

$BG = EG/G$ el espacio clasificador.

Ejemplos

1. $F_2 = \langle x, y \mid \rangle$ grupo libre



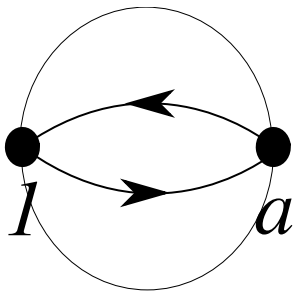
[Fuente: Serre, *Trees* (1980)]

Teorema

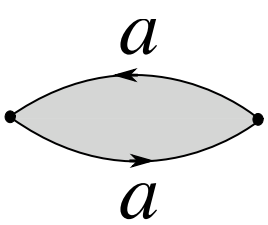
Todo subgrupo de un grupo libre es libre.

Ejemplos

1. $F_2 = \langle x, y \mid \rangle$ grupo libre
2. $C_2 = \langle a \mid a^2 \rangle$ grupo cíclico



$$\downarrow$$



$$\mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$$

$$S^\infty$$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$$

$$EC_2 \to BC_2$$

Ejemplos

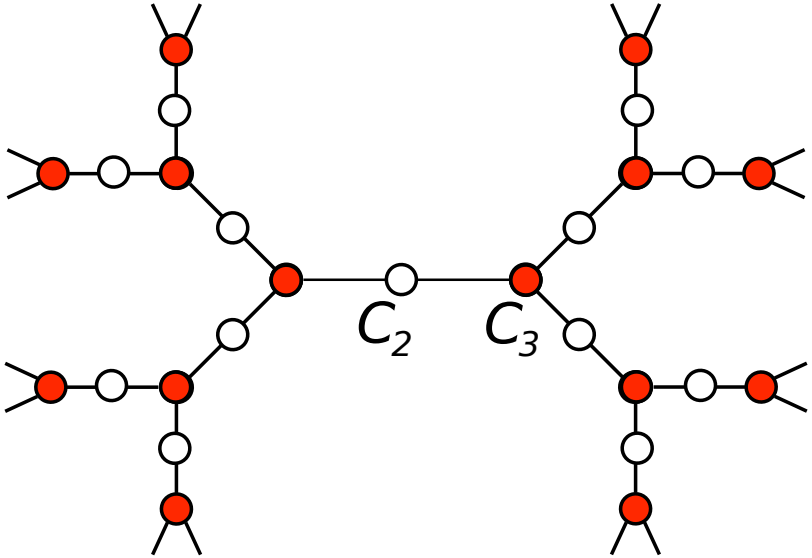
1. $F_2 = \langle x, y \mid \rangle$ grupo libre
2. $C_2 = \langle a \mid a^2 \rangle$ grupo cíclico

Teorema

Si G contiene torsión, BG tiene dimesión infinita.

Demonstración

3. $C_2 * C_3 = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle$



Acciones propias

Objetivo

Generalizar el concepto de espacio universal EG a otro tipo de acciones, no necesariamente libres.

Definición

Un G-CW-complejo es propio si $\mathrm{stab}_G(x) \leq G$ es finito $\forall x \in X$.
Un G-CW-complejo propio X es un espacio universal para acciones propias si

(U) para todo G-CW-complejo propio, existe una G-función $Y \to X$ única salvo G-homotopía.

Notación: $X = \underline{E}G$, $X/G = \underline{B}G$.

Ejemplos

Más sobre $\underline{E}G$

Definición equivalente

Un G-CW-complejo propio X es un $\underline{E}G$ si

(C) para todo $H \leq G$ finito, el subcomplejo de puntos fijos X^H es contráctil.

Grupo fundamental

$$\pi_1(\underline{B}G) = G/\operatorname{Tor}(G).$$

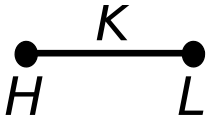
Teorema (Leary-Nucinkis, 2001)

Dado un CW-complejo conexo X, existe G_X tal que $X \simeq \underline{B}G_X$.

Nota. $G/\operatorname{Tor}(G)$ puede contener torsión.

Ejemplos de $\underline{E}G$

- G finito $\Rightarrow \underline{E}G = \{\text{pt}\}$
- G libre de torsión $\Rightarrow \underline{E}G = EG$
- $G = H *_K L$ con H, L finitos

  $\underline{E}G =$ árbol con dominio fundamental 

- L grupo de Lie con $\pi_0(L) < \infty$, $G \leq L$ discreto
  $\underline{E}G = L/K$ con K compacto maximal
- X espacio CAT(0), G-acción propia $\Rightarrow X = \underline{E}G$
- G hiperbólico, $\underline{E}G =$ complejo de Rips
- $G = Out(F_n)$, $\underline{E}G$ = "espacio exterior"
- G grupo de clases de difeomorfismos,
  $\underline{E}G$ = espacio de Teichmüller

C^*-álgebras

Definición

Una C^*-álgebra A es un álgebra sobre $\mathbb{C}$ con una norma $\|\cdot\|$ y una involución $a \mapsto a^*$ tal que

- A es completa respecto a $d(a,b) = \|a-b\|$
- $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$
- $\|aa^*\| = \|a\|^2$

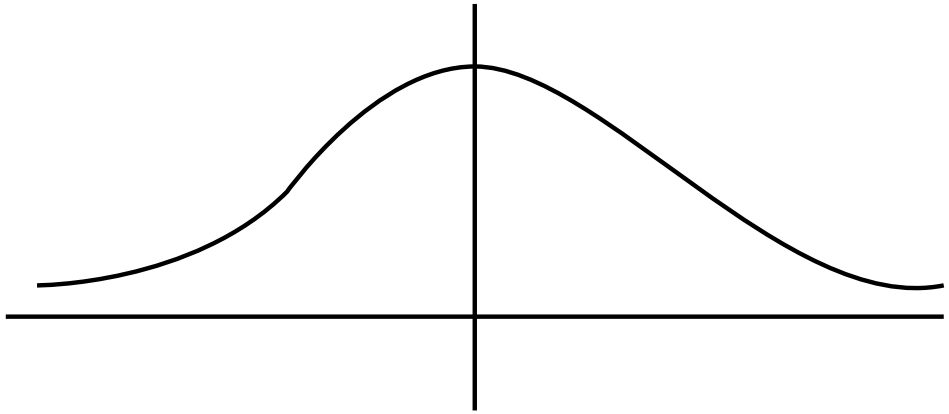
Ejemplos de C^*-álgebras

El trivial $(\mathbb{C}, |\cdot|, \text{conjugación})$

El topológico Sea X Hausdorff y localmente compacto

$X^+ = X \cup \{\infty\}$ la compactación de Alexandroff

$C_0(X) = \{\alpha\colon X^+ \to \mathbb{C} \text{ continua}, \alpha(\infty) = 0\}$



$\|\alpha\| = \sup \|\alpha(x)\| \quad \alpha^*(x) = \overline{\alpha(x)}$

Ejemplos de C^*-álgebras

El trivial $(\mathbb{C}, |\cdot|, \text{conjugación})$

El topológico Sea X Hausdorff y localmente compacto

$X^+ = X \cup \{\infty\}$ la compactación de Alexandroff

$C_0(X) = \{\alpha\colon X^+ \to \mathbb{C} \text{ continua}, \alpha(\infty) = 0\}$

El universal $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert

$\mathbb{B}(\mathcal{H}) = \{T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \|T\| \overset{Def}{=} \sup_{\|u\|\leq 1} \|Tu\| < \infty\}$

T^* = operador adjunto $\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^* v\rangle$

El que nos interesa G grupo discreto

$\mathbb{C}G = \{u\colon G \to \mathbb{C} \text{ soporte finito}\}$

$\langle u, v\rangle = \sum_{g\in G} \overline{u(g)} v(g)$

No es completo

La C^*-álgebra reducida de G

$\ell^2(G) = \{u\colon G \to \mathbb{C} \mid \sum_{g\in G} |u(g)|^2 < \infty\}$
espacio de Hilbert con $\langle u, v\rangle \Rightarrow \mathbb{B}(\ell^2(G))$ C^*-álgebra

Inclusión de álgebras $\mathbb{C}G \xhookrightarrow{\lambda_G} \mathbb{B}(\ell^2 G)$: dado $g \in G$

$$(\lambda_G(g)u)x = u(g^{-1}x) \quad \forall\, u \in \ell^2 G, \forall\, x \in G$$

Definición

La C^*-álgebra reducida de G es la compleción de $\mathbb{C}G$ en $\mathcal{B}(\ell^2 G)$.

Notación: $C_r^* G$.

Teoría K para C^*-álgebras: K_0

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Definimos $K_0(A) = K_0^{alg}(A)$, teoría K algebraica del anillo A $\quad Gr\left(\{R\text{-módulos proy. fin. gen.}\}/\text{iso}, \oplus\right)$

Ejemplos

- $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$
- H grupo finito: $C_r^* H = \mathbb{C}H$
  $K_0(C_r^* H) = R_{\mathbb{C}}(H)$ anillo de representación Definición

Teoría K para C^*-álgebras: K_1

Definición

Sea A una C^*-álgebra. Definimos

$$GL_\infty(A) = \operatorname{colim}_n GL_n(A), \text{ via } GL_n(A) \hookrightarrow GL_{n+1}(A).$$

$$K_n(A) = \pi_{n-1}\left(GL_\infty(A)\right).$$

Nota. Si A no tiene unidad, se añade formalmente.

Periodicidad de Bott

$K_n(A) \cong K_{n+1}(A)$ para todo $n \geq 0$.

Ejemplos

- $K_1(\mathbb{C}) = 0$, ya que $GL_n(\mathbb{C})$ es conexo por arcos.
- H finito: $K_1(C_r^* H) = K_1(\mathbb{C}H) = 0$, por el ejemplo anterior.

Relación con otras teorías K

La conjetura de Baum-Connes

Identifica la teoría K de $C_r^* G$ con una teoría de homología equivariante de $\underline{E}G$.

Conjetura (Paul Baum & Alain Connes, $\sim$ 1982)

La función de ensamblaje

$$K_i^G(\underline{E}G) \longrightarrow K_i(C_r^* G) \quad i = 0, 1$$

es un isomorfismo para todo grupo discreto G.

$K^G(-)$ = homología K equivariante

Conjeturas relacionadas

Homología K equivariante

Conjeturas implicadas por Baum-Connes

Sea G un grupo, $g \in G$ con $g^n = 1$.
Entonces $e = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g^i \in \mathbb{C}G$ es un idempotente $e^2 = e$.

Conjetura del idempotente

Sea G libre de torsión. Entonces $C_r^* G$ no tienen idempotentes salvo 0, 1.

Conjetura de Baum-Connes $\Rightarrow$ Conjetura del idempotente

Relación con otras conjeturas

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{IC} & \mathbf{SIC} \arrow[l] \arrow[r] & \mathbf{IC} & \mathbf{PCGC} \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathbf{AC} \arrow[r] & \mathbf{ZDC} \arrow[u] & \mathbf{STC} \arrow[u] \arrow[r] & \mathbf{TC} \arrow[u] & \mathbf{SBTC} \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathbf{SAC} \arrow[u] \arrow[r] & \mathbf{EC} \arrow[u] & \boxed{\mathbf{BCC}} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{WBTC} \arrow[u] & \mathbf{BTC} \arrow[l] \\
 & \mathbf{GLRC} & \mathbf{SNC} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{NC} & \\
 & & \mathbf{0\epsilon SC} & \mathbf{S0\epsilon SC} \arrow[l] &
\end{tikzcd}
$$

AC: Atiyah Conjecture
BTC: Bass Trace Conjecture
EC: Embedding Conjecture
GLRC: Gromov-Lawson-Rosenberg Conjecture
IC: Idempotent Conjecture
NC: Novikov Conjecture
PCGC: Projective Class Group Conjecture
SAC: Strong Atiyah Conjecture
SBTC: Strong Bass Trace Conjecture
SIC: Strong Idempotent Conjecture
SNC: Strong Novikov Conjecture
STC: Strong Trace Conjecture
S0ϵSC: Strong Zero-in-the-Spectrum Conjecture
TC: Trace Conjecture
WBTC: Weak Bass Trace Conjecture
ZDC: Zero Divisor Conjecture
0ϵSC: Zero-in-the-Spectrum Conjecture

[Fuente: Mislin-Valette, *Proper Group Actions and the Baum-Connes Conjecture* (2001)]

Estado de la conjetura

- $\surd$ grupos libres, grupos abelianos, grupos de una relación, grupos de nudos, grupos hiperbólicos, grupos de trenzas, grupos de Coxeter, grupos amenables
- ? $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$ (función de ensamblaje inyectiva)

Homología K equivariante

- G-teoría de homología para G-CW-complejos
- versión equivariante de homología K (dual de la teoría K topológica)
- periodicidad de Bott: $K^G_{n+2}(X) \cong K^G_n(X)$
- caracterizada por los valores en órbitas:

  $K^G_n(G/H) = K_n(C^*_r H)$ – teoría K de C^*-álgebras

  1. H finito $\quad C^*_r(H) = \mathbb{C}H$ y $K_n(\mathbb{C}H) = \begin{cases} R_{\mathbb{C}}(H) & n = 0 \\ 0 & n = 1 \end{cases}$
  2. $K^G_n(G/G) = K^G_n(\text{pt}) = K_n(C^*_r G)$

Función de ensamblaje

Original G Hausdorff, loc. compacto, contable segundo
$K_i^G(\underline{E}G)$ definido mediante teoría KK
función de ensamblaje = función de índice

Para topólogos G discreto
función de ensamblaje: inducida por $\underline{E}G \to \mathrm{pt}$

$$K_i^G(\underline{E}G) \to K_n^G(\mathrm{pt}) = K_n(C_r^* G)$$

Como hocolim [. . . . . .]

Una secuencia espectral (Atiyah-Hirzebruch)

$$E^2_{p,q} = H_p^{Bre}(\underline{E}G; R_{\mathbb{C}}) \Rightarrow K^G_{p+q}(\underline{E}G)$$

donde $H_*^{Bre}(-; R_{\mathbb{C}})$ es la homología del complejo de cadenas

$$\ldots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\text{órbitas} \\ i\text{-celdas}}} R_{\mathbb{C}}(\mathrm{stab}_G(e_\alpha)) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\text{órbitas} \\ (i\text{-}1)\text{-celdas}}} R_{\mathbb{C}}(\mathrm{stab}_G(e_\beta)) \longrightarrow \ldots$$

homología de Bredon

Proposición

Si $\dim(\underline{E}G) \leq 3$ entonces existe una secuencia exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_1^{Bre}(\underline{E}G; R_{\mathbb{C}}) \arrow[r] & K_1^G(\underline{E}G) \arrow[r] & H_3^{Bre}(\underline{E}G; R_{\mathbb{C}}) \arrow[d] \\
0 & H_2^{Bre}(\underline{E}G; R_{\mathbb{C}}) \arrow[l] & K_0^G(\underline{E}G) \arrow[l] & H_0^{Bre}(\underline{E}G; R_{\mathbb{C}}) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

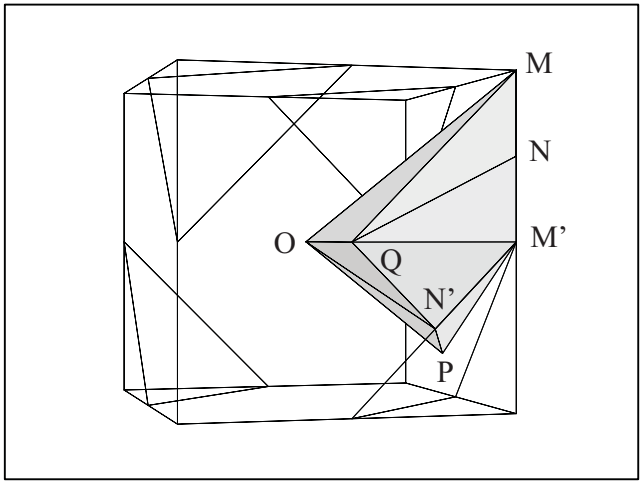
Ejemplos

- $SL_3(\mathbb{Z})$
- Grupos triangulares

Ejemplo: $SL_3(\mathbb{Z})$

$SL_n(\mathbb{R})/SO(n)$ es un modelo de $\underline{E}SL_n(\mathbb{Z})$ de dim. $\frac{n(n+1)}{2} - 1$.

Existe una retracción equivariante a un modelo de dimensión $\frac{n(n-1)}{2}$ (mínima). Para $SL_3(\mathbb{Z})$ (Soulé, 1978):



Estabilizadores: S_4, D_6, D_4, S_3, $C_2 \times C_2$, C_2, $\{1\}$.

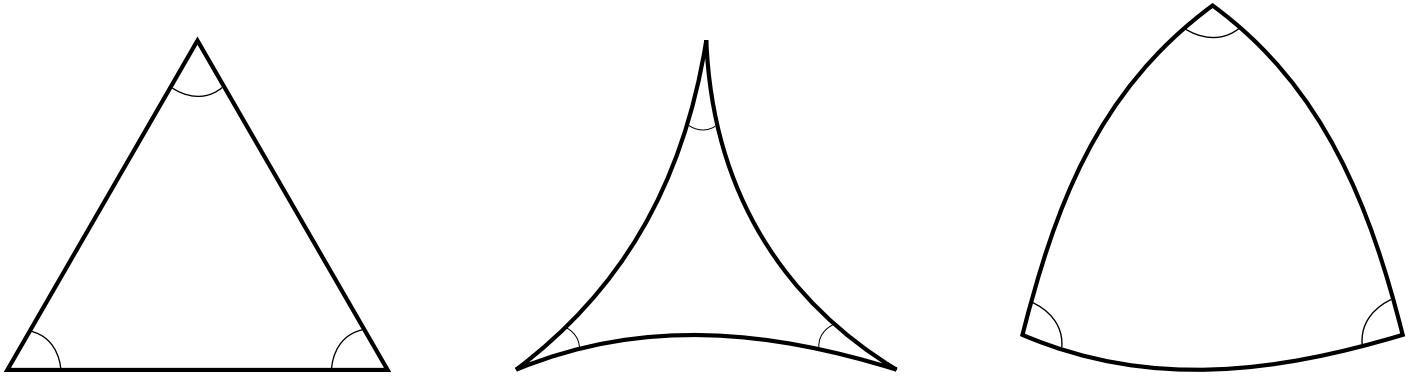
Resultado

Sean $G = SL_3(\mathbb{Z})$, $H_i = H_i^{Bre}(\underline{E}G)$, $K_i = K_i^G(\underline{E}G)$.

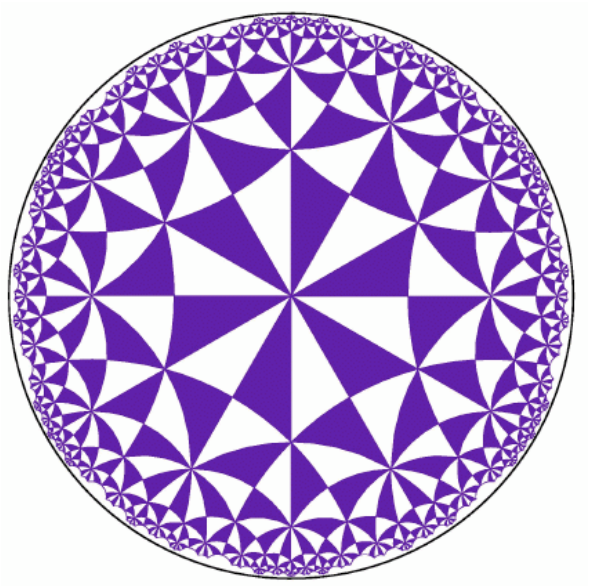
Entonces $H_3 = H_2 = H_1 = 0 = K_1$ y $H_0 = \mathbb{Z}^{\oplus 8} = K_0$.

Ejemplo: grupos triangulares

Sean $p, q, r \geq 2$ enteros. Sea T un triángulo con ángulos interiores $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ y $\frac{\pi}{r}$.

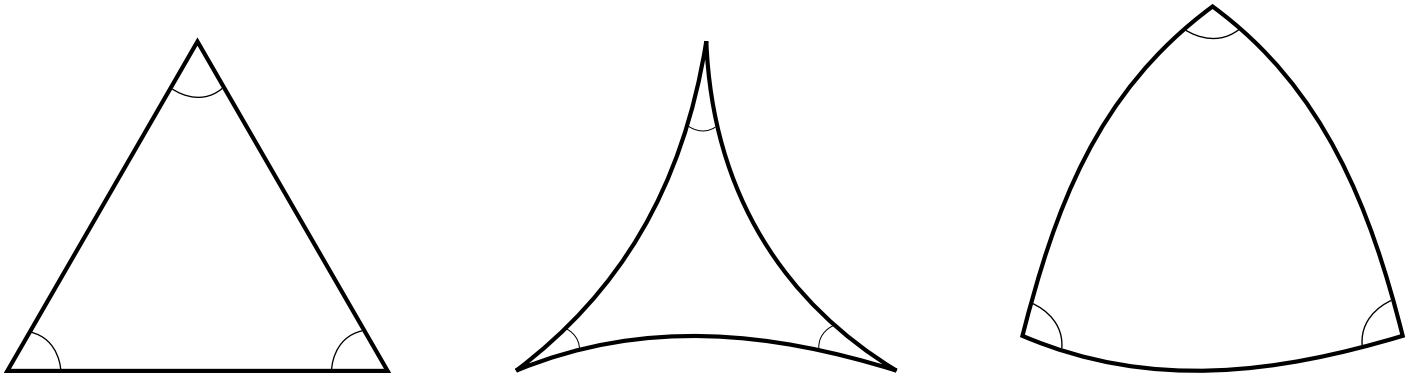


Los reflejos de T dan un teselado de $X = \mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2$ o bien $\mathbb{S}^2$



Ejemplo: grupos triangulares

Sean $p, q, r \geq 2$ enteros. Sea T un triángulo con ángulos interiores $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ y $\frac{\pi}{r}$.



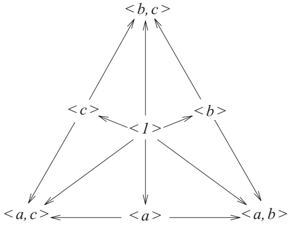
Los reflejos de T dan un teselado de $X = \mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2$ o bien $\mathbb{S}^2$ y generan un grupo de isometrías de X:

$$\Delta(p, q, r) = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^p, (bc)^q, (ca)^r \rangle$$

En los casos euclídeo e hiperbólico, X es un $\underline{E}\Delta(p, q, r)$.

Ejemplo: grupos triangulares

Estabiladores



Es decir, $\{1\}$, C_2 (cíclico), D_p, D_q, D_r (dihédricos).

Homología de Bredon

$$R_{\mathbb{C}}(\{1\}) \to R_{\mathbb{C}}(C_2) \oplus R_{\mathbb{C}}(C_2) \oplus R_{\mathbb{C}}(C_2) \to R_{\mathbb{C}}(D_p) \oplus R_{\mathbb{C}}(D_q) \oplus R_{\mathbb{C}}(D_r)$$

$$H_2 = 0 \quad H_1 = \begin{cases} \mathbb{Z} \\ 0 \end{cases} \quad H_0 = \begin{cases} \mathbb{Z}^{N-4} & p, q \text{ y } r \text{ son impares} \\ \mathbb{Z}^{N-5} & \text{si no} \end{cases}$$

donde $N = cc(D_p) + cc(D_q) + cc(D_r)$. Luego $K_0^G(\underline{E}G) = H_0$, $K_1^G(\underline{E}G) = H_1$ coinciden con $K_i(C_r^* G)$ via la Conj de B-C.

Referencias

- Sánchez-García, Rubén J., *Bredon homology and equivariant K-homology of $SL(3,\mathbb{Z})$*, J. Pure Appl. Algebra 212 (2008), no. 5, 1046-1059.
- Sánchez-García, Rubén J., *Equivariant K-homology for some Coxeter groups* , J. Lond. Math. Soc. (2) 75 (2007), no. 3, 773-790.
- Baum, Paul F. y Sánchez-García, Rubén J., *K-theory for group C^*-algebras*, Proceedings of the Sedano Winter School on K-theory, Springer Lecture Notes, to appear.


TENEMOS QUE ATRAVESAR EL BOSQUE DE FANGORN Y EL ABISMO DE HELM PARA, RODEANDO LA CIMA DE LOS VIENTOS SIN QUE NOS SORPRENDAN LOS URUK-HAI, PODER LLEGAR A LA VENTANILLA DEL MONTE DEL DESTINO
COMO NOS FALTE ALGÚN PAPEL OTRA VEZ, ME VAN A OIR...
ESTO DE CONSEGUIR UNA BECA DE INVESTIGACION CADA VEZ ES MAS LIOSO
SI

FIN

Si G tiene torsión, $\dim(BG) = \infty$

Demostración 1: Sea $\widetilde{X} \to BG$ el espacio recubridor asociado a un subgrupo $C_m \leq G$. Entonces $\widetilde{X}$ es un BC_m. Si BG es un CW-complejo finito-dimensional, también lo es $\widetilde{X}$. Imposible: $H_{2n+1}(C_m; \mathbb{Z}) = C_m$ para todo $n \geq 0$.

Demostración 2: (P. A. Smith) Si C_p actúa en un CW-complejo contráctil finito-dimensional $X = EG$, entonces X^{C_p} es mod-p acíclico. En particular, $X^{C_p} \neq \emptyset$.

Atrás

Relación con otras teorías K

Teoría K topológica Sea X Hausdorff, localmente compacto. Entonces $K^j(X) = K_j(C_0(X))$ para todo $j \geq 0$.

Teoría K algebraica Sea A una C^*-álgebra.

$M_\infty(A) = \operatorname{colim}_n M_n(A)$

$\mathring{A} = \overline{M_\infty(A)}$ la *estabilización* de A.

Entonces $K_j(A) = K_j^{alg}(\mathring{A})$ para todo $j \geq 0$.

Atrás

Minicurso: Anillo de representaciones

H grupo finito

Representación: homomomorfismo $\rho\colon H \to GL_m(\mathbb{C})$

Suma $\rho_1 \oplus \rho_2$ Producto $\rho_1 \otimes \rho_2$

Irreducible: $\rho \neq \rho_1 \oplus \rho_2$

Hecho

Existen $n = |\mathrm{clsconj}(H)|$ representaciones irreducibles de H.

Anillo de representación: $R_{\mathbb{C}}(H) = \mathbb{Z}\rho_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \mathbb{Z}\rho_n$.

Inducción: $K \leq H$ $\mathrm{ind}_K^H\colon R_{\mathbb{C}}(K) \to R_{\mathbb{C}}(H)$

Atrás

Dos teoremas sobre C^*-álgebras

Theorem (Gelfand)

Toda C^*-álgebra conmutativa es isomorfa a $C_0(X)$ para algún espacio Hausdorff y localmente compacto X.

Theorem (Gelfand-Naimark)

Toda C^*-álgebra es isomorfa a una sub-C^*-álgebra de $\mathcal{B}(H)$ para algún espacio de Hilbert H.