Cálculo de la categoría LS de grupos de Lie mediante abiertos asociados a autovalores

María José Pereira Sáez[(1)] — *Universidade de Santiago de Compostela*

Categoría de Lusternik-Schnirelmann

Definición 1 Dado un espacio topológico X la *categoría LS* (normalizada) de X es el menor entero k tal que X puede recubrirse por $k+1$ abiertos contráctiles en X.

Este invariante homotópico ha sido ampliamente estudiado y tiene numerosas aplicaciones que van desde el cálculo de variaciones a la robótica. Su cálculo en el caso de los grupos de Lie y espacios homogéneos es un problema importante del que se conocen sólo soluciones parciales. Por ejemplo, para los grupos simplécticos únicamente se sabe que $\operatorname{cat} Sp(1) = \operatorname{cat} S^3 = 1$, $\operatorname{cat} Sp(2) = 3$ y $\operatorname{cat} Sp(3) = 5$ [2].

Abiertos asociados a autovalores

Obtener abiertos contráctiles asociados a autovalores es una técnica que ha demostrado ser útil en el caso complejo. Fue utilizada por Singhof para calcular la categoría de $U(n)$ [6] y por Mimura y Toda para los espacios simétricos $U(2n)/Sp(n)$ y $U(n)/O(n)$ [5].

Consideremos un álgebra asociativa con uno $\mathbb{K}$, en nuestro caso, los reales $\mathbb{R}$, los complejos $\mathbb{C}$ o los cuaternios $\mathbb{H}$. Dado un elemento $\sigma \in \mathbb{K}$ de norma 1 le asociamos el abierto formado por las matrices unitarias tales que $A - \sigma \mathrm{I}$ es inversible,

$$\Omega(\sigma) = \{A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{H}) : A - \sigma \mathrm{I} \text{ inversible}\}.$$

Puede verse que estos abiertos son contráctiles mediante la contracción de Cayley

$$A_t = \frac{(1+t)A - (1-t)\sigma I}{(1+t)I - (1-t)\bar{\sigma} A}, \quad t \in [0,1]$$

Obsérvese que en los casos real y complejo, la condición de pertenencia al conjunto $\Omega(\sigma)$ es equivalente a que σ no esté en el espectro de la matriz A.

Ejemplo 1 *El caso de* $U(n)$.

En el año 1975 Singhof probó en [6] que la categoría de $SU(n)$ es $n-1$ y por tanto, como $U(n) \cong S^1 \times SU(n)$, $\operatorname{cat} U(n) = n$. Al obtener un recubrimiento explícito usando la aplicación exponencial, se encontró con el inconveniente de tener que elegir una rama de logaritmo, lo que lleva consigo algunas complicaciones técnicas. La búsqueda de un recubrimiento categórico directamente mediante abiertos asociados a autovalores es mucho más sencilla.

Dada una matriz unitaria cualquiera X de orden n sabemos que tiene a lo sumo n autovalores diferentes, todos de norma 1. Así, si consideramos $n+1$ complejos unitarios diferentes $z_0, \dots, z_n$, siempre habrá entre ellos algún z_i que no sea autovalor de X, de manera que $X \in \Omega(z_i)$. Tenemos pues que $\{\Omega(z_0), \dots \Omega(z_n)\}$ forma un recubrimiento de $U(n)$ por abiertos contráctiles.

El caso cuaterniónico

Discutiremos a continuación la posibilidad de extender el método de los abiertos $\Omega(\sigma)$ para calcular la categoría de los grupos simplécticos $Sp(n)$.

Debido a la no conmutatividad de los cuaternios nos encontramos con una serie de problemas. En primer lugar, necesitamos dotar al espacio cuaterniónico $\mathbb{H}^n$ con una estructura de $\mathbb{H}$-espacio vectorial por la derecha que nos permita hablar de matriz asociada a una aplicación lineal en el sentido usual. En segundo lugar, la teoría de autovalores por la derecha está bien establecida, incluyendo la diagonalización de las matrices simplécticas [1]. Sin embargo, para una matriz $A \in Sp(n)$ y un cuaternio $\sigma \in \mathbb{H}$ la condición de que $A - \sigma \mathrm{I}$ sea inversible está relacionada con los autovalores por la izquierda.

Definición 2 Un cuaternio $\sigma \in \mathbb{H}$ es un *autovalor por la izquierda* de la matriz $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{H})$ sii existe un $v \in \mathbb{H}^n$, $v \neq 0$, tal que $Av = \sigma v$.

Los autovalores por la izquierda de una matriz cuaterniónica de orden n no están muy estudiados. Para $n = 2$, Huang y So dieron en [3] una caracterización de las matrices con infinitos autovalores izquierda. Como aplicación hemos obtenido el siguiente resultado en el caso simpléctico.

Teorema 3 ([4]) *Una matriz simpléctica* $A \in Sp(2)$ *puede tener uno, dos o infinitos autovalores por la izquierda. El último caso se da cuando y sólo cuando la matriz es de la forma*

$$L_q \circ R_\theta = \begin{pmatrix} q\cos\theta & -q\sin\theta \\ q\sin\theta & q\cos\theta \end{pmatrix} \qquad q \in \mathbb{H}, |q| = 1; \theta \in \mathbb{R}, \sin\theta \neq 0.$$

La matriz $L_q \circ R_\theta$ corresponde a la composición de una rotación real $R_\theta \neq \pm \mathrm{I}$ con una traslación por la izquierda L_q, $|q| = 1$. Podemos caracterizar sus autovalores:

Lema 4 *Sea la matriz* $A = L_q \circ R_\theta$ *como en el teorema 3 y sea* $\sigma \in \mathbb{H}$ *un cuaternio. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *σ es un autovalor por la izquierda de A;*
2. *$\sigma = q(\cos\theta + \sin\theta \cdot \omega)$ con $\omega \in \langle i, j, k \rangle_{\mathbb{R}}$, $|\omega| = 1$;*
3. *La norma $|\sigma| = 1$ y la parte real $\Re(\bar{q}\sigma) = \cos\theta$;*
4. *$\bar{q}\sigma$ es de la misma clase de conjugación que $\cos\theta + i\sin\theta$.*

Estas propiedades nos permiten probar el siguiente teorema. En él se afirma que, en contra de lo esperado, $Sp(2)$ nunca se puede recubrir por cuatro abiertos asociados a autovalores.

Teorema 5 *Sean* $\sigma_1, \dots \sigma_4$ *cuatro cuaternios de norma* 1. *Entonces existe una matriz* $A \in Sp(2)$ *que tiene a todos estos cuaternios como autovalores por la izquierda.*

Demostración.— Por el teorema 3 para que la matriz tenga más de dos autovalores tendrá que ser del tipo $A = L_q \circ R_\theta$. Fijado $\cos\theta \neq \pm 1$, por el lema 4 nos llega con resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\Re(\bar{q}\sigma_m) = \cos\theta, \quad m = 1, \dots, 4 \tag{1}$$

y la solución q debe verificar $|q| = 1$. Si escribimos $q = t + xi + yj + zk$, $\sigma_m = t_m + x_m i + y_m j + z_m k$ el sistema (1) puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} t_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_4 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puede verse ahora que siempre podemos elegir $\cos\theta$ de manera que el sistema tenga alguna solución de módulo 1.

Ejemplo 2 *Tomemos los cuaternios* $\{1, i, j, k\}$.

Si denotamos por $u = 1+i+j+k$, podemos escribir el sistema al que dan lugar como

$$q = \cos\theta \cdot u,$$

con soluciones unimodulares $q = \pm(1/2)u$. Entonces, las únicas dos matrices simplécticas que tienen a estos cuatro cuaternios como autovalores izquierda son

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} u & -\sqrt{3}u \\ \sqrt{3}u & u \end{pmatrix} \text{ y } \frac{1}{4}\begin{pmatrix} u & \sqrt{3}u \\ -\sqrt{3}u & u \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que por el lema 4 todos los autovalores σ de estas dos matrices cumplen que $\Re(\bar{q}\sigma) = \pm 1/2$. Así, si tomamos $\sigma_5 = (i+j)/\sqrt{2}$ tenemos que $\Re(\bar{q}\sigma_5) = \pm 1/\sqrt{(2)}$, por tanto, las dos matrices están en $\Omega(\sigma_5)$.

Es decir, necesitamos cinco abiertos asociados a autovalores para recubrir $Sp(2)$.

Referencias

[1] Brenner, J.L. Matrices of quaternions, *Pac. J. Math.* **1** (1951), pp. 329–335.

[2] Fernández-Suárez, L.; Gómez Tato, A.; Strom, J.; Tanré, D. The Lyusternik-Schnirelmann category of Sp(3). *Proc. Am. Math. Soc. 132* **No. 2** (2004), pp. 587–595.

[3] Huang, L.; So, W. On left eigenvalues of a quaternionic matrix, *Linear Algebra Appl. 323*, No.**1-3** (2001), pp. 105–116.

[4] Macías-Virgós, E.; Pereira-Sáez, M. J. Left eigenvalues of 2×2 symplectic matrices, *Electron. J. Linear Algebra* **18** (2009), pp. 274–280.

[5] Mimura, M.; Toda, H. *Topology of Lie groups, I and II*. Translations of Mathematical Monographs **91**. American Mathematical Society, 1991.

[6] Singhof, W. On the Lusternik-Schnirelmann Category of Lie Groups I, II, *Math. Z.* **145** (1975), pp. 11–116; **151** (1976), pp. 143–148.

[7] Zhang, F. Quaternions and matrices of quaternions, *Linear Algebra Appl.* **251** (1997), pp. 21–57.

[(1)]En colaboración con E. Macías Virgós. Parcialmente financiado por FEDER y proyecto MICINN MTM2008-0586.

mariajose.pereira@usc.es. Departamento de Xeometría e Topoloxía, Universidade de Santiago de Compostela, Avda Lope Gómez de Marzoa s/n, 15782–España