Una nueva mirada a los objetos cofibrantes

Pere Pascual Gainza

Departament de Matemàtica Aplicada 1
Universitat Politècnica de Catalunya

XVI Reunión de Topología
Almería, 23 Octubre 2009

Contenido

1. Introducción
2. Objetos cofibrantes: categorías de Cartan-Eilenberg
3. Categoría de functores a valors en complejos de cadenas
4. Ejemplos:
   - Cadenas diferenciales vs cadenas singulares
   - Teorías homológicas de complejos

1. Introducción

Planteamiento del problema general: Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{W}$ una clase de morfismos de $\mathcal{C}$.
La *categoría localizada de $\mathcal{C}$ respecto de $\mathcal{W}$* es una categoría $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ dotada de un functor

$$\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}\left[\mathcal{W}^{-1}\right]$$

ta que

(i) Si $w \in \mathcal{W}$, entonces $\gamma(w)$ es un isomorfismo.

(ii) Dada una categoría $\mathcal{D}$ y un functor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ que transforma los morfismos $w \in \mathcal{W}$ en isomorfismos, existe un único functor $F' : \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}] \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $F' \circ \gamma = F$.

Objetivo: dar una descripción razonable de la categoría loclizada.

Ejemplo 1. Espacios topológicos: *CW* complejos
Recordemos que una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es una *equivalencia homotópica débil* si

$$f_* : \pi_*(X, x) \longrightarrow \pi_*(Y, f(x))$$

es un isomorfismo para todo $x \in X$.

Teorema 1 (Whitehead). *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una equivalencia débil entre CW-complejos. Entonces, f es una equivalencia homotópica.*

Teorema 2 (Aproximación). *Sea X un espacio topológico. Existe un CW-complejo Y y una equivalencia homotópica débil $f : Y \longrightarrow X$.*

Consecuencia: $\pi\mathbf{CW} \cong Ho\mathbf{Top}$.

Ejemplo 2. Complejos de cadenas: complejos proyectivos
Sea R un anillo conmutativo y **Ch** la categoría de complejos (positivos) de cadenas de R-módulos. Recordemos que un morfismo de complejos $f : C \longrightarrow D$ es un casi-isomorfismo si

$$f_* : H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$$

es un isomorfismo.

Teorema 1. *Sea $f : C \longrightarrow D$ un casi-isomorfismo entre complejos de cadenas proyectivos grado a grado. Entonces, f es una equivalencia homotópica de complejos.*

Teorema 2. *Sea C un complejo de cadenas. Existe un complejo de cadenas proyectivo grado a grado P y un casi-isomorfismo $f : P \longrightarrow C$.*

Consecuencia: $K(\mathcal{P}) \cong D(R)$.

Ejemplo 3. Adcg : álgebras minimales

Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo de característica cero y $\mathbf{Adgc_1}(\mathbf{k})$ la categoría de $\mathbf{k}$-álgebras diferenciales graduadas conmutativas 1-conexas (es decir, con $H^0(A) = \mathbf{k}, H^1(A) = 0$). Recordemos que un *adgc* A es minimal si es libre, $A = \Lambda V$, y con diferencial descomponible, $dA \subset A^+ \cdot A^+$.

Teorema 1. *Sea $f : A \longrightarrow B$ un casi-isomorfismo entre adgc's minimales. Entonces, f es un isomorfismo.*

Teorema 2. *Sea A un adgc. Existe un adgc minimal M y un casi-isomorfismo $f : M \longrightarrow A$.*

Consecuencia: $\pi(\mathcal{M}) \cong Ho(\mathbf{Adgc_1}(\mathbf{k}))$.

2. Objetos cofibrantes

Hemos visto dos tipos de resultado:

- Teoremas tipo 1: describen la buena propiedad de los CW-complejos, los complejos proyectivos o las álgebras minimales; son objetos cofibrantes.
- Teoremas tipo 2: son suficientes para describir completamente la categoría localizada correspondiente.

Las categorías de modelos de Quillen son el marco habitual para establecer el concepto de objeto cofibrante.

Una categoría de modelos de Quillen es una categoría $\mathcal{C}$ junto a tres clases de morfismos: equivalencias débiles ($\xrightarrow{\sim}$), fibraciones ($\twoheadrightarrow$), y cofibraciones ($\rightarrowtail$), que satisfacen ciertos axiomas.

Un objeto A de una categoría de modelos es *Quillen cofibrante* si tienen la propiedad de levantamiento respecto de todas las fibraciones triviales (es decir, que son equivalencias débiles):

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, two heads, "\sim"] \\ A \arrow[ur, dotted, "g"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Observación: Las categorías de modelos de Quillen son una herramienta muy potente para el estudio de la categoría localizada $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$. Algunos inconvenientes:

1. Parte de tres clases de morfismos predeterminadas para después definir la relación de homotopía. En algunos ejemplos y aplicaciones, la noción de homotopía está determinada desde el principio, mientras que no lo están las fibraciones o las cofibraciones.
2. Son simétricas respecto de las fibraciones/cofibraciones, mientras que en algunos ejemplos se tienen sólo propiedades "laterales".
3. La comprobación de los axiomas puede resultar árdua y compleja. Para algunas de las aplicaciones basta con disponer de los teoremas equivalentes a Whitehead y Aproximación.

Datos: una categoría $\mathcal{C}$ con dos clases de morfismos $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{W}$.

- $\mathcal{S}$ son las *equivalencias fuertes*, (p.e. las equivalencias homotópicas),
- $\mathcal{W}$ son las *equivalencias débiles*, (p.e. las equivalencias homotópicas débiles o los casi-isomorfismos).

Definición. Decimos que $M \in \ Ob\ \mathcal{C}$ es $(\mathcal{S}, \mathcal{W})$-*cofibrante* si para todo $w \in \mathcal{W}$ y todo morfismo $f : M \longrightarrow X$ de $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$, existe un *unico levantamiento* g en $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "w"] \\ M \arrow[ur, dotted, "g"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Es decir,

$$w_* : \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}](M, X) = \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}](M, Y).$$

Observaciones:

1. Los diagramas son diagramas de morfismos en $\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}]$. Se gana la unicidad del levantamiento.
2. Si M es cofibrante $\Rightarrow \mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}](M, -)$ es un "functor exacto".
3. La noción de cofibrante es "homotópicamente invariante". En los ejemplos:
   - Los espacios topológicos homotópicamente equivalentes a los CW-complejos son objetos cofibrantes.
   - Los complejos de cadenas homotópicamente equivalentes a un complejo proyectivo grado a grado son cofibrantes. En particular, todo complejo contráctil es cofibrante.

Estos objetos cofibrantes satisfacen un teorema del tipo Whitehead. Más exactamente:

Teorema. *M es $(\mathcal{S}, \mathcal{W})$-cofibrante si, y sólo si, para todo $X \in Ob\, \mathcal{C}$,*

$$\mathcal{C}[\mathcal{S}^{-1}](M, X) = \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}](M, X).$$

Corolario. *Sea $\mathcal{M}$ una subcategoria plena de $\mathcal{C}_{cof}$. El functor*

$$j : \mathcal{M}[\mathcal{S}^{-1}, \mathcal{C}] \longrightarrow \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$$

es plenamente fiel.

Definición. $(\mathcal{C}, \mathcal{S}, \mathcal{W})$ es una categoría de *Cartan-Eilenberg* (por la izquierda) si todo objeto de $\mathcal{C}$ puede aproximarse por un objeto cofibrante:

$$\forall X \in Ob\, \mathcal{C},\ \exists M \in Ob\, \mathcal{C}_{cof},\ f : M \longrightarrow X \in \overline{\mathcal{W}}.$$

Teorema. $(\mathcal{C}, \mathcal{S}, \mathcal{W})$ *es una categoría CE sii* j *induce una equivalencia de categorías*

$$j : \mathcal{C}_{cof}[\mathcal{S}^{-1}, \mathcal{C}] \cong \mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$$

Ejemplos.

1. **Top**, con las equivalencias homotópicas y las equivalencias débiles, es una categoría de CE.
2. **Ch**, con las equivalencias homotópicas y los casi-isomorfismos, es una categoría de CE.
3. Más generalmente, si $\mathcal{C}$ es una categoría de modelos de Quillen, $\mathcal{C}_f$, con las equivalencias homotópicas por la izquierda y las equivalencias débiles, es una categoría CE.
4. $\mathbf{Adgc_1}(\mathbf{k})$, con las equivalencias homotópicas y los casi-isomorfismos, es una categoría de CE. Las álgebras minimales forman una subcategoría de suficientes cofibrantes.

3. Categoría de functores

Sea $\mathcal{X}$ una categoría.

Objetivo: definir los functores cofibrantes $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{Ch}$.

Ejemplos

1. $\mathcal{X} = \mathbf{Top}$ la categoría de espacios topológicos, $\mathbf{Cat}(\mathbf{Top}, \mathbf{Ch})$ la categoría de functores valorados en complejos de grupos abelianos.
2. $\mathcal{X}$ es la categoría de $\mathbf{k}$-álgebras conmutativas.

Fijamos $\mathcal{S}$ una de las siguientes clases de morfismos de $\mathbf{Cat}(\mathcal{X}, \mathbf{Ch})$:

- la clase de las equivalencias homotópicas $\mathcal{S}_h$,
- la clase de las equivalencias homotópicas puntuales $\mathcal{S}_{ph}$,
- la clase de los casi-isomorfismos $\mathcal{S}_{qis}$,

Diremos que $\mathcal{S}$ es una *clase acíclica de morfismos*.

Una clase acíclica de morfismos $\mathcal{S}$ satisface:

1. $\mathcal{S}$ es una clase de morfismos saturada,
2. $\mathcal{S}$ contiene las equivalencias homotópicas,
3. $\mathcal{S}$ está formada por morfismos acíclicos,
4. si $f : C_{**} \longrightarrow D_{**}$ es un morfismo de complejos dobles de primer cuadrante, entonces

$$f_n : C_{*n} \longrightarrow D_{*n} \in \mathcal{S}, \quad n \geq 0 \Longrightarrow Tot\ f \in \mathcal{S}.$$

Para definir la clase $\mathcal{W}$ de $\mathbf{Cat}(\mathcal{X}, \mathbf{Ch})$, partiremos de un cotriple $\mathbf{G} = (G, \varepsilon, \delta)$ en $\mathcal{X}$.
La construcción estándar asociada a un cotriple $\mathbf{G}$ es el functor simplicial aumentado $B_\bullet G$ definido por

$$\begin{aligned} B_n G &= G^{n+1}, \\ \partial_i &= G^i \varepsilon G^{n-i} : G^{n+1} \Rightarrow G^n, \quad 0 \leq i \leq n, \\ s_i &= G^i \delta G^{n-i} : G^{n+1} \Rightarrow G^{n+2}, \quad 0 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

La transformación natural ε define la aumentación

$$\varepsilon : B_\bullet G \Rightarrow 1.$$

La construcción estándar induce un functor

$$\begin{array}{rcl} B : \mathbf{Ch} & \longrightarrow & \mathbf{Ch} \\ K_* & \mapsto & Tot\ B_* K_*, \end{array}$$

donde *Tot* es el complejo total asociado a un complejo doble, con una transformación natural

$$\varepsilon : B \Rightarrow 1$$

inducida por la aumentación de $B_\bullet G$.
Definimos

$$\mathcal{W} = B^{-1}(\mathcal{S}).$$

Teorema.
Fijemos una clase de morfismos acíclicos $\mathcal{S}$ *de* $\mathbf{Cat}(\mathcal{X}, \mathbf{Ch})$ *y sea* $\mathcal{W} = B^{-1}(\mathcal{S})$. *Entonces,*

1. $K \in Ob\ \mathbf{Cat}(\mathcal{X}, \mathbf{Ch})$ *es cofibrante sii* $\varepsilon_K : BK \longrightarrow K \in \mathcal{S}$.
2. *Todo functor* $K \in Ob\ \mathbf{Cat}(\mathcal{X}, \mathbf{Ch})$ *admite un modelo cofibrante.*

Es decir, la categoría $\mathbf{Cat}(\mathcal{X}, \mathbf{Ch})$ es de Cartan-Eilenberg.

Para detectar si un functor $K : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{Ch}$ es cofibrante, disponemos del siguiente criterio:

Proposición. *Si, para todo $n \geq 0$, el morfismo de aumentación*

$$\varepsilon_n : K_n G \longrightarrow K_n$$

tiene una sección (es decir, existe $\theta_n : K_n \longrightarrow K_n G$ tal que $\varepsilon_n \theta_n = \mathrm{id}$), entonces K es un functor cofibrante.

Nota: Este criterio identifica los functores G-representables en el sentido de Barr-Beck.

4. Ejemplos

Fijamos $\mathcal{X} = \mathbf{Top}$ la categoría de espacios topológicos y $\mathcal{S}$ una clase acíclica de morfismos de $\mathbf{Cat}(\mathbf{Top}, \mathbf{Ch})$.
Definimos un cotriple G en $\mathbf{Top}$ a partir del conjunto de modelos $\mathcal{M} = \{\Delta^n, n \geq 0\}$: se define el functor $G : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top}$ mediante

$$G(X) = \bigsqcup_{f:M \to X, M \in \mathcal{M}} (M, f)$$

con $(M, f) = M$, y transformaciones naturales $\varepsilon : G \Rightarrow \mathrm{id}$, $\delta : G \Rightarrow G^2$ adecuadas.

Teorema. *Sea $\mathcal{W} = B^{-1}(\mathcal{S})$. Entonces, $K \in Ob\ \mathbf{Cat}(\mathbf{Top}, \mathbf{Ch})$ es cofibrante sii $\varepsilon_K : BK \longrightarrow K \in \mathcal{S}$.*

Ejemplo 1. *Tomemos $\mathcal{S} = \mathcal{S}_h$. El functor de cadenas singulares S_* es un modelo cofibrante del functor H_0 en $Cat(\mathbf{Top}, \mathbf{Ch})$.*

- S_* es cofibrante: escindimos S_n mediante la transformación natural

$$\theta : S_n \longrightarrow S_n \circ G$$

que manda el símplex $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ a

$$\theta(\sigma) = \mathrm{id} : \Delta^n \longrightarrow (\Delta^n, \sigma) \subseteq G(X).$$

- El morfismo $\tau : S_* \longrightarrow H_0(-, \mathbb{Z})$ es una equivalencia débil: para todo X

$$G\tau : \bigoplus_{\sigma:\Delta^n \longrightarrow X} S_*(\Delta^n, \sigma) \longrightarrow \bigoplus_{\sigma:\Delta^n \longrightarrow X} H_0((\Delta^n, \sigma), \mathbb{Z})$$

es una equivalencia homotópica, por la contractibilidad de Δ^n.

Ejemplo 2. *Tomemos* $\mathcal{X} = \mathbf{Diff}$, *categoría de variedades diferenciables con esquinas, y* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_h$. *El functor de cadenas singulares diferenciables* S_*^∞ *es un modelo cofibrante del functor* H_0 *en* $\mathbf{Cat}(\mathbf{Diff}, \mathbf{Ch})$.

El functor de cadenas singulares S_* está definido también en $\mathbf{Cat}(\mathbf{Diff}, \mathbf{Ch})$, y se tiene una transformación natural de functores

$$S_*^\infty \Rightarrow S_*^{\cdot}$$

Cuestión: *¿Es S_* cofibrante en* $\mathbf{Cat}(\mathbf{Diff}, \mathbf{Ch})$*?*

- Si X es una variedad diferencial, un resultado clásico de Eilenberg establece que la inclusión $S_*^\infty(X) \longrightarrow S_*(X)$ es una equivalencia homotópica.
- Se puede demostrar que no es posible obtener inversas homotópicas functorialmente.
- Observación: si tomamos $\mathcal{S}_{ph}$ entonces $S_*^\infty \Rightarrow S_*$ es de $\mathcal{S}_{ph}$ y, en consecuencia, S_* es cofibrante en $\mathbf{Cat}(\mathbf{Diff}, \mathbf{Ch})$.

Definición. L es G-acíclico (o acíclico sobre los modelos) si $L \longrightarrow H_0 L \in \mathcal{W}$, es decir, $G(L) \longrightarrow G(H_0 L)$ es de $\mathcal{S}$.

Teorema de los modelos acíclicos. *Sean $K, L \in Ob\ \mathbf{Cat}(\mathbf{Top}, \mathbf{Ch})$ y $\mathcal{S}$ una clase de morfismos acíclicos. Si K es cofibrante y L es G-acíclico, entonces la restricción*

$$H_0 \rho_{KL} : [K, L] \longrightarrow [H_0 K_{|\mathcal{M}}, H_0 L_{|\mathcal{M}}]$$

es biyectiva.

Corolario. *Sean $K, L \in Ob\ \mathbf{Cat}(\mathbf{Top}, \mathbf{Ch})$ cofibrantes y acíclicos sobre los modelos. Si $H_0 K_{|\mathcal{M}}$ y $H_0 L_{|\mathcal{M}}$ son isomorfos, entonces K y L son isomorfos en $\mathbf{Cat}(\mathbf{Top}, \mathbf{Ch})[\mathcal{S}^{-1}]$.*

Aplicación a un resultado clásico.

Definición. Una teoría homológica de cadenas es un functor

$$L_* : \mathbf{CW}_f^2 \longrightarrow \mathbf{Ch},$$

que satisface:

1. Para cada par (X, A), la sucesión

$$0 \longrightarrow L_*(A) \longrightarrow L_*(X) \longrightarrow L_*(X, A) \longrightarrow 0$$

   es exacta.

2. $h_*(X, A) = H_*(L_*(X, A))$ define una teoría homológica generalizada.

Teorema de Burdick-Conner-Floyd. *Sea L_* una teoría homológica de cadenas y sea $h_* = h_*(pto)$. Entonces*

$$h_n(X, A) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(X, A; h_q).$$

De hecho, existe un isomorfismo de functores

$$\tau : S_*(-) \otimes L_*(pto) \longrightarrow L_*$$

en $\mathbf{Cat}(\mathbf{CW}_f, \mathbf{Ch})[\mathcal{S}^{-1}]$, *donde $\mathcal{S}$ es la clase de casi-isomorfismos.*

- se prueba que $S_*(-) \otimes L_*(pto)$ es cofibrante, por lo que la existencia de τ se sigue del teorema de los modelos acíclicos,
- se acaba por el teorema de Eilenberg-Steenrod.

Variante monoidal

Los ingredientes usados en anteriormente son:

- un cotriple en **Top**.
- el functor total *Tot* en la categoría de complejos dobles.

La categoría **Ch**, con el producto tensorial de complejos, es monoidal. Además, el functor *Tot* es un functor monoidal.

Teorema de los modelos acíclicos monoidal. *Sea $\mathcal{X}$ una categoría monoidal con un cotriple monoidal* **G** *y $\mathcal{S}$ una clase de morfismos acíclicos de* $\mathbf{SyMon}(\mathcal{X}, \mathbf{Ch})$. *Sean K, L objetos de* $\mathbf{SyMon}(\mathcal{X}, \mathbf{Ch})$.
Si K es cofibrante y L es G-acíclico, entonces la aplicación

$$H_0 : [K, L] \longrightarrow [H_0 K, H_0 L]$$

es biyectiva.

Los functores monoidales simétricos $\mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Ch}$ admiten una extensión natural a opéradas topológicas, $\mathbf{Op_{Top}} \longrightarrow \mathbf{Op_{Ch}}$.

En este caso, del teorema de los modelos acíclicos se deduce:

Corolario. *Los functores de cadenas singulares y cadenas cúbicas ordenadas*

$$S_*, C_*^{ord} : \mathbf{Op_{Top}} \longrightarrow \mathbf{Op_{Ch}}$$

son débilmente equivalentes.