La propiedad de separación uniforme y los teoremas de Banach–Stone para funciones lipschitzianas

Antonio Jiménez Vargas, Antonio Morales Campoy y Moisés Villegas Vallecillos

Departamento de Álgebra y Análisis Matemático, Universidad de Almería

XVI Encuentro de Topología

Almería, 23 y 24 de octubre de 2009

Resumen

El teorema de Banach-Stone ha sido generalizado en varias direcciones. Uno de estos estudios aborda el problema de describir isomorfismos de retículos vectoriales. Podemos citar las generalizaciones obtenidas por J. Chen, Z. Chen y Wong [4] y por Ercan y Önal [5]. Usando la propiedad de separación uniforme de Weaver [11] y la propiedad de unión uniforme, presentamos una versión del teorema de Banach-Stone para funciones lipschitzianas con valores en retículos vectoriales (Teorema 5).

El teorema de Banach–Stone

Nuestro punto de partida es un teorema conocido:

S. Banach

Teorema 1 (Teorema de Banach–Stone) . *Si X e Y son dos espacios topológicos de Hausdorff compactos y $T : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(Y)$ es una isometría lineal y sobreyectiva, entonces existe un homeomorfismo $\varphi : Y \to X$ y una función $\tau \in \mathcal{C}(Y)$ con $|\tau(y)| = 1$ para todo $y \in Y$ tales que*
$$T(f)(y) = \tau(y)\, f(\varphi(y)) \quad \forall y \in Y, \forall f \in \mathcal{C}(X).$$

M. H. Stone

Teoremas de Banach–Stone para isomorfismos de retículos vectoriales

Definición 2 (Definiciones básicas) .

i) *Un* retículo vectorial *E es un espacio vectorial ordenado en el cual $x \vee y = \sup\{x, y\}$ existe para cualesquiera $x, y \in E$. Para cada $x \in E$, $|x| = x \vee (-x)$ es el* valor absoluto *de x.*

ii) *Un* retículo de Banach *E es un retículo vectorial provisto de una norma completa $\|\cdot\|$ que satisface la llamada de ley de Riesz:*
$$x, y \in E,\ |x| \le |y| \ \Rightarrow\ \|x\| \le \|y\|.$$

iii) *Un operador lineal $T : E \to F$ definido entre dos retículos vectoriales se dice que es un* homomorfismo de retículos vectoriales *si*
$$T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)\,, \quad \forall x, y \in E.$$

iv) *A un homomorfismo de retículos vectoriales biyectivo se le llama* isomorfismo de retículos vectoriales.

v) *Dado un espacio normado E, S_E representará la esfera unidad de E.*

vi) *Sea X un conjunto no vacío y sea E un espacio vectorial no nulo. Se dice que una función $f : X \to E$* no se anula *si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$.*

vii) *Sean X e Y dos espacios topológicos, E y F dos espacios vectoriales topológicos no nulos y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos subconjuntos no vacíos de $\mathcal{C}(X, E)$ y $\mathcal{C}(Y, F)$, respectivamente. Una aplicación $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$* conserva las funciones que no se anulan *si*
$$f \in \mathcal{A},\ f \text{ no se anula} \ \Rightarrow\ T(f) \text{ no se anula.}$$
Si T es biyectiva y T y T^{-1} conservan las funciones que no se anulan, se dice que T conserva en ambas direcciones las funciones que no se anulan.

Abramovich y Aliprantis dan en [1] una versión del teorema de Banach-Stone para homomorfismos de retículos vectoriales de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ en $\mathcal{C}(Y, \mathbb{R})$. En el caso vector-valuado tenemos los siguientes resultados:

Teoremas de Banach-Stone para funciones continuas con valores en retículos de Banach

- Cao, Reilly y Xiong [3, 2003]
- Miao, Cao y Xiong [9, 2006]
- Ercan y Önal [5, 2008]
- Chen, Chen y Wong [4, 2008]

Retículos de funciones lipschitzianas y teoremas de Banach–Stone

Definición 3 (Aplicaciones lipschitzianas y espacios de Lipschitz) . *Sean (X, d) e (Y, d) dos espacios métricos y sea E un retículo de Banach.*

i) *Se dice que una aplicación $f : X \to Y$ es* lipschitziana *si existe una constante $C \ge 0$ tal que*
$$d(f(x), f(w)) \le C\, d(x, w) \quad \forall x, w \in X.$$
En tal caso, al número $L(f) = \sup\{\frac{d(f(x),f(w))}{d(x,w)} : x, w \in X,\ x \neq w\}$ lo llamaremos constante de Lipschitz de f. Si f es biyectiva y f y f^{-1} son lipschitzianas, decimos que f es un homeomorfismo de Lipschitz.

ii) *El espacio de Lipschitz* $\mathrm{Lip}(X, E)$ *es el retículo vectorial norma-completo de las funciones lipschitzianas acotadas $f : X \to E$ con el orden puntual y la norma de Lipschitz $\|f\|_d = \max\{L(f), \|f\|_\infty\}$, donde $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$.*

iii) *El espacio de Lipschitz pequeño* $\mathrm{lip}(X, E)$ *es el subretículo vectorial norma-cerrado de $\mathrm{Lip}(X, E)$ formado por las funciones $f \in \mathrm{Lip}(X, E)$ tales que*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \ x, y \in X,\ 0 < d(x, y) < \delta \ \Rightarrow\ \frac{\|f(x) - f(y)\|}{d(x,y)} < \varepsilon.$$

Los siguientes artículos estudian los isomorfismos de retículos vectoriales entre retículos de funciones lipschitzianas real-valuadas:

Teoremas de Banach-Stone para retículos de funciones lipschitzianas escalarmente valuadas

- Weaver [10, 1994]
- Garrido y Jaramillo [6, 2004]
- Cabello y Cabello [2]

En nuestros teoremas usaremos la propiedad de separación uniforme introducida por Weaver en [11, 1996] y una nueva propiedad, la propiedad de unión uniforme.

Definición 4 . *Sea X un espacio métrico, E un espacio de Banach no nulo y $\mathcal{V}$ un subespacio vectorial de $\mathrm{Lip}(X, E)$. Decimos que:*

i) *$\mathcal{V}$* separa puntos uniformemente *si existe $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ tal que*
$$\forall x, y \in X,\ \forall e \in S_E,\ \exists h \in \mathcal{V} \text{ con } \|h\|_d \le a,\ \ h(x) = d(x, y)\, e,\ \ h(y) = 0.$$

ii) *$\mathcal{V}$* junta puntos uniformemente *si existe $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$ tal que*
$$\forall x, y \in X,\ \forall e \in S_E,\ \exists k \in \mathcal{V} \text{ con } \|k\|_d \le b,\ \ k(x) = k(y) = e.$$

Observación. Si $\mathcal{V}$ contiene las funciones constantes, entonces $\mathcal{V}$ junta puntos uniformemente. Por tanto, $\mathrm{Lip}(X, E)$ y $\mathrm{lip}(X, E)$ tienen la propiedad de unión uniforme. Cuando X es acotado, es fácil ver que $\mathrm{Lip}(X, E)$ separa puntos uniformemente y, en algunos casos, $\mathrm{lip}(X, E)$ también lo hace.

Nuestros teoremas

Teorema 5 (Teorema principal) . *Sean X e Y dos espacios métricos compactos, E y F dos retículos de Banach no nulos, y $\mathscr{L}$ y $\mathscr{R}$ dos subretículos vectoriales norma-cerrados de $\mathrm{Lip}(X, E)$ y $\mathrm{Lip}(Y, F)$, respectivamente, que* separan y juntan puntos uniformemente. *Si $T : \mathscr{L} \to \mathscr{R}$ es un* isomorfismo de retículos vectoriales *que* conserva en ambas direcciones las funciones que no se anulan, *entonces existe un homeomorfismo de Lipschitz $\varphi : Y \to X$ y una aplicación lipschitziana $\widehat{T} : Y \to \mathcal{L}(E, F)$, donde $\mathcal{L}(E, F)$ es el espacio de todos los operadores lineales y continuos de E en F y $\widehat{T}(y) : E \to F$ es un isomorfismo de retículos vectoriales para cada $y \in Y$, tales que*
$$T(f)(y) = \widehat{T}(y)(f(\varphi(y))) \quad \forall y \in Y, \forall f \in \mathscr{L}.$$

Corolario 6 . *Sean X e Y dos espacios métricos compactos, y $\mathscr{L}$ y $\mathscr{R}$ dos subretículos vectoriales norma-cerrados de $\mathrm{Lip}(X, \mathbb{R})$ y $\mathrm{Lip}(Y, \mathbb{R})$, respectivamente, que* separan puntos uniformemente *y* contienen las funciones constantes. *Si $T : \mathscr{L} \to \mathscr{R}$ es un* isomorfismo de retículos vectoriales, *entonces existe un homeomorfismo de Lipschitz $\varphi : Y \to X$ tal que*
$$T(f)(y) = T(\mathbf{1})(y)\, f(\varphi(y)) \quad \forall y \in Y, \forall f \in \mathscr{L}.$$
donde $\mathbf{1}$ denota al función constantemente igual a 1.

Referencias

[1] Y. A. Abramovich y C. D. Aliprantis, An Invitation to Operator Theory, *Graduate Studies in Mathematics* **50**, American Mathematical Society, Providence, 2002.

[2] F. Cabello Sánchez y J. Cabello Sánchez, Nonlinear isomorphisms of lattices of Lipschitz functions, disponible en http://kolmogorov.unex.es/∼fcabello.

[3] J. Cao, I. Reilly y H. Xiong, A lattice-valued Banach–Stone theorem, *Acta Math. Hungar.* **98** (2003), 103–110.

[4] J. X. Chen, Z. L. Chen y N.-G. Wong, A Banach–Stone theorem for Riesz isomorphisms of Banach lattices, *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), 3869–3874.

[5] Z. Ercan y S. Önal, The Banach–Stone theorem revisited, *Topology Appl.* **155** (2008), 1800–1803.

[6] M. I. Garrido y J. A. Jaramillo, Homomorphisms on function lattices, *Monatsh. Math.* **141** (2004), 127–146.

[7] A. Jiménez-Vargas y M. Villegas-Vallecillos, Order isomorphisms of little Lipschitz algebras, *Houston J. Math.* **34** (2008), 1185–1195.

[8] A. Jiménez-Vargas, A. Morales-Campoy y M. Villegas-Vallecillos, The uniform separation property and Banach–Stone theorems for lattice-valued Lipschitz functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 3769–3777.

[9] X. Miao, J. Cao y H. Xiong, Banach–Stone theorems and Riesz algebras, *J. Math. Anal. Appl.* **313** (2006), 177–183.

[10] N. Weaver, Lattices of Lipschitz functions, *Pacific. J. Math.* **164** (1994), 179–193.

[11] N. Weaver, Subalgebras of little Lipschitz algebras, *Pacific. J. Math.* **173** (1996), 283–293.