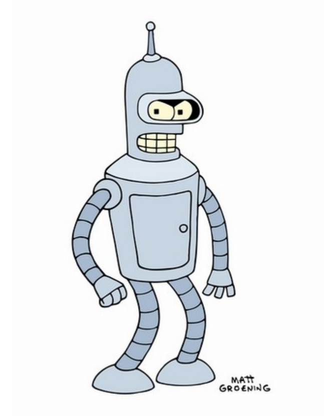
XVI ENCUENTRO DE TOPOLOGÍA
Universidad de Almería
23 y 24 de octubre de 2009

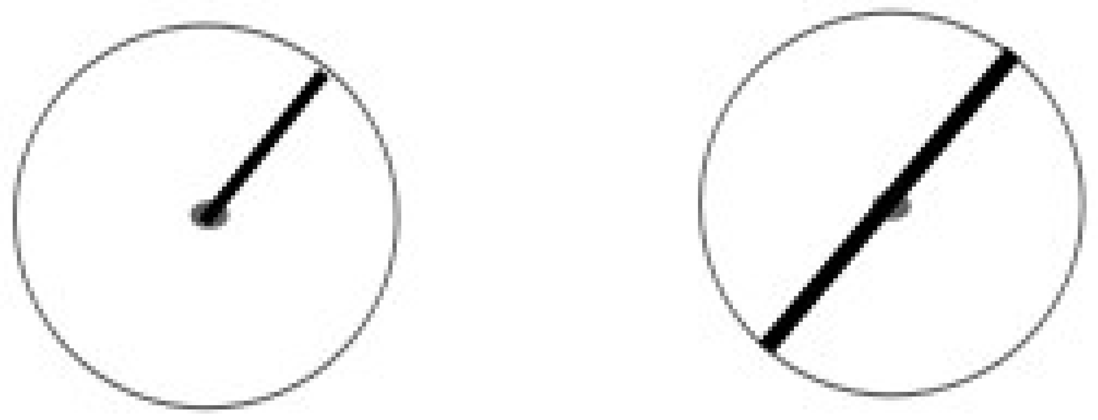
Complejidad Topológica Reducida

Jose Gabriel Carrasquel Vera
Universidad de Málaga



1) Introducción

Todo sistema mecánico (un robot, si se quiere) admite un espacio de configuraciones, que consiste en el espacio topológico formado por cada una de las configuraciones que puede adoptar el sistema. Por ejemplo, el espacio de configuraciones de una barra fijada en un extremo, que se mueve libremente en el espacio es S^2. Sin embargo, si se fija la barra en el centro, su espacio de configuraciones viene a ser el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$.



Un movimiento de una posición a otra de un sistema mecánico viene a ser un camino continuo en su espacio de configuraciones. Un planificador de movimiento de un sistema mecánico es un algoritmo que tiene por *input* pares de puntos del espacio de configuraciones y por *output* caminos que unen dichos puntos. Formalmente, no es más que una sección de la fibración $p : X^I \to X \times X$ que a cada camino le asocia su punto inicial y su punto final ($\alpha \mapsto (\alpha(0), \alpha(1))$).

Pero: Un espacio admite planificador de movimiento global si, y sólo si, es contráctil.

2) TC: Complejidad Topológica

Si denotamos por X al espacio de configuraciones de cierto sistema mecánico, se define la complejidad topológica de X como el menor entero n tal que existen $n+1$ secciones locales de p cuyos dominios forman un recubrimiento abierto de $X \times X$. La complejidad topológica es un invariante homotópico. Una vez dada esta definición, es posible reformular el Pero: anterior por

Hecho: Un espacio es contráctil si, y sólo si, su complejidad topológica es nula.

La complejidad topológica de las esferas de dimensión impar es uno. En efecto, sea $U := \{(x,y) : x \neq -y\}$ y definimos s tal que asigne a cada $(x,y) \in U$ el único camino más corto sobre la esfera, de velocidad constante, que empiece en x y acabe en y. Ahora bien, consideremos V un campo de vectores tangentes en la esfera que nunca se anule, definamos $V := \{(x,y) : x \neq y\}$ y t tal que asigne a cada $(x,y) \in V$ en único camino más corto que une x con $-x$ en la dirección de $V(x)$ concatenado con el único camino más corto que une $-x$ con y.

3) TC en Homotopía Racional

Sea X un espacio y $(\Lambda V, d)$ un modelo de Sullivan para X. La multiplicación $\mu : (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda V', d) \to (\Lambda V, d)$ es un modelo para la inclusión $\Delta_X \to X \times X$ que se puede descomponer como una fibración λ compuesto con un cuasi-isomorfismo. A su vez, λ se puede descomponer como un cuasi-isomorfismo compuesto con un morfismo sobreyectivo $h : (\Lambda V, d) \otimes (\Lambda V', d) \otimes \Lambda \widetilde{V} \otimes \Lambda d\widetilde{V} \to (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \widetilde{V}, D)$. Para cada $m \geq 1$, considérese el morfismo p_m

$$(\Lambda V, d) \otimes (\Lambda V', d) \to \frac{(\Lambda V, d) \otimes (\Lambda V', d) \otimes \left(\Lambda \widetilde{V} \otimes \Lambda d\widetilde{V}\right)^{\otimes m}}{\Pi_{i=1}^{m} ker h}$$

Teorema: $TC(X_{\mathbb{Q}})$ es el menor entero para el cual p_{m+1} admite retracción homotópica.

4) Complejidad Topológica Reducida

Si queremos que nuestro *robot* no sea tonto del todo, es razonable que ignore la instrucción *¡no hagas nada!* Esta idea da lugar a la definición de complejidad topológica reducida: el menor n tal que existen $n+1$ secciones locales de $p' : X^I - X^{S^1} \to F(X,2)$ cuyos dominios forman un recubrimiento abierto de $F(X,2) := \{(x,y) : x \neq y\}$. Por lo visto anteriormente, la complejidad topológica reducida de las esferas de dimensión impar es nula.

5) RTC en Homotopía Racional

Sea A un modelo de dualidad de Poincaré para X y $D \in A$ su clase diagonal. Entonces $\Lambda V \otimes \Lambda V \to A \otimes A \to \frac{A \otimes A}{(D)}$ es un modelo para la inclusión $F(X,2) \to X \times X$. El diagrama siguiente nos explica cómo deducir que un modelo para p' es la inclusión $\frac{A \otimes A}{(D)} \to (\frac{A \otimes A}{(D)} \otimes \Lambda \widetilde{V}, \widetilde{D})$.

$$\begin{tikzcd}
X^I - X^{S^1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{pbh}"] & X^I \arrow[d, "p"] \\
F(X,2) \arrow[r, hook] & X \times X
\end{tikzcd}$$

Apl

$$\begin{tikzcd}
& \Lambda V & \\
\Lambda V \otimes \Lambda V \arrow[ur, "\mu"] \arrow[rr, hook] \arrow[d, "\simeq"'] & & (\Lambda V \otimes \Lambda V' \otimes \Lambda \widetilde{V}, D) \arrow[ul, "\simeq"'] \arrow[dd] \\
A \otimes A \arrow[d] & \text{poh} & \\
\frac{A \otimes A}{(D)} \arrow[rr, hook] & & (\frac{A \otimes A}{(D)} \otimes \Lambda \widetilde{V}, \widetilde{D})
\end{tikzcd}$$

Descomponemos ahora el modelo como un cuasi-isomorfismo compuesto con un morfismo sobreyectivo

$$h' : \left(\frac{A \otimes A}{(D)} \otimes \Lambda \widetilde{V} \Lambda d\widetilde{V}\right) \to \left(\frac{A \otimes A}{(D)} \otimes \Lambda \widetilde{V}, \widetilde{D}\right).$$

Para cada $m \geq 1$, definimos

$$p'_m : \frac{A \otimes A}{(D)} \to \frac{\frac{A \otimes A}{(D)} \otimes \left(\Lambda \widetilde{V} \otimes \Lambda d\widetilde{V}\right)^{\otimes m}}{\Pi_{i=0}^{m} ker h'}.$$

Teorema: Sea X racional. Entonces, $RTC(X) = m$ si y sólo si p'_{m+1} admite retracción homotópica.

6) Bibliografía

- M.Farber, *Topological complexity of motion planning.*
- L.Lechuga, A.Murillo, *Topological complexity of formal spaces.*
- P.Lambrechts, D.Stanley, *The rational homotopy type of configuration spaces of two points.*
- P.Lambrechts, D.Stanley, *Poincaré duality and commutative graded differential algebras.*

Trabajo conjunto con Aniceto Murillo Mas, Universidad de Málaga y Jose Manuel García Calcines, Universidad de La Laguna.