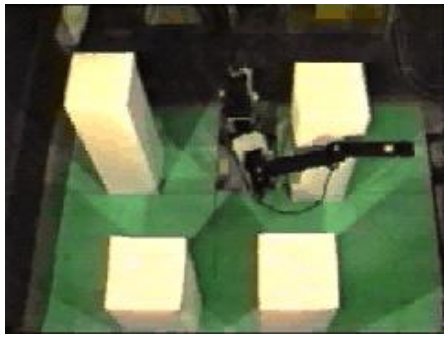
Sobre la Complejidad Topológica

XVI ENCUENTRO
DE TOPOLOGÍA

Universidad de Almería
23 y 24 de octubre de 2009

Robótica: Planificadores de movimientos

El problema del transportista de pianos



Brazo articulado con obstáculos

Movimiento de robots sin colisión

Espacio de Configuraciones

Modelar el robot (o robots) y el ambiente en el que se mueven

Desarrollar algoritmos que hagan pasar de un estado a otro del espacio de configuraciones

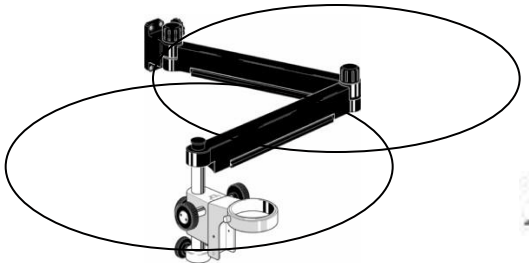
Jean Claude Latombe, 1991

Michael Farber, 2003

Robótica Topológica

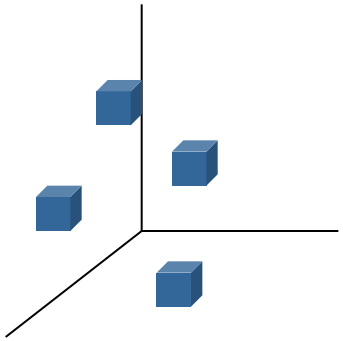
Uso de la topología en la modelización de planificadores de movimientos.

I. Descripción topológica del espacio de configuraciones:



$$X = S^1 \times S^1$$

$$X = C(M;2), \quad M = D^2 - \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$$



$$X = C(\mathbb{R}^3; n) = \{(x_1, \dots, x_n),\ x_i \neq x_j\}$$

II. Descripción topológica de algoritmos de movimientos:

Dado X el espacio de configuraciones de un movimiento, pasar del estado A al estado B es equivalente a dar un camino (curva continua) en X que una A y B, $\alpha\colon I \to X$, $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$.

Definición

Dado X un espacio topológico, un algoritmo de movimiento en X es una sección (NO NECESARIAMENTE CONTINUA!) $s\colon X \times X \to PX = X^I$ de la fibración

$$\gamma\colon PX \to X \times X, \quad \gamma(\alpha) = \big(\alpha(0), \alpha(1)\big).$$

Observación

La fibración $\gamma\colon PX \to X \times X$ admite una sección continua si y sólo si X es contráctil.

Michael Farber, 2003

Complejidad Topológica

Dado un espacio de configuraciones X, la *complejidad topológica* de X, $TC(X)$ es el menor k (o infinito) tal que $X \times X$ puede ser recubierto por $k+1$ abiertos $\{U_i\}_{1 \leq i \leq k+1}$ para los que existe una sección local continua de γ, $s_i\colon U_i \to PX$, $1 \leq i \leq k+1$.

Categoría seccional

A. Schwarz, 1966

La *categoría seccional de una fibración* $p\colon E \to B$, $\operatorname{secat}(p)$, es el menor entero k (o infinito) tal que B es recubierto por $k+1$ abiertos $\{U_i\}_{1\leq i\leq k+1}$ para los que existe una sección local de p, $s_i\colon U_i \to E$, $p \circ s_i \simeq 1_{U_i}$, $1 \leq i \leq k+1$.

Propiedades

$\operatorname{secat}(p) \leq \operatorname{cat}(B)$.

$\operatorname{secat}(p) \geq \operatorname{nil} \ker\big(H^+(p;R)\big)$ for any R.

Let $x_1, \ldots, x_k \in H^+(B;R)$ such that $H(p)(x_i) = 0$ and $x_1 \cup \ldots \cup x_k \neq 0$. Then, $\operatorname{secat}(p) \geq k$.

Volvamos a la complejidad topológica…

$$TC(X) = \text{secat}\,(\gamma\colon PX \to X \times X)$$

$TC(X)$ es un invariante del tipo de homotopía de X.

$\text{cat}\,(X) \leq TC(X) \leq \text{cat}\,(X \times X) \leq 2\,\text{cat}\,(X)$.

$TC(X) \geq \text{nil}\,($"divisores de cero" del producto cup de $X)$.

M. Farber, J. González, S. Tabachnikov, S. Yuzvinsky,…

Cálculo de la complejidad topológica

$$TC(S^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 2 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

$TC(S^{n_1} \times \ldots \times S^{n_p})$ = (número de esferas de grado impar) + 2(número de esferas de grado par).

Sea S_g la su~~p~~perficie compacta conexa orientable de género g.

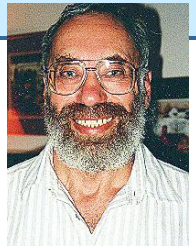
$$TC(S_g) = \begin{cases} 2 & \text{si } g \leq 1, \\ 4 & \text{si } g > 1. \end{cases}$$

Si M es una variedad simpléctica 1-conexa de dimensión $2n$, entonces $TC(M) = 2n$. En particular, $TC(\mathbb{C}P^n) = 2n$.

$$X = C(\mathbb{R}^m; n), \quad TC(X) = \begin{cases} 2n-1 & \text{si } m \text{ es impar,} \\ 2n-2 & \text{si } m \text{ es par.} \end{cases}$$

$TC(\mathbb{R}P^n) =$ Menor entero k para el que existe una aplicación axial $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^k$, con $n < k$.

M. Farber, S. Tabachnikov y S. Yuzvinsky, 2003



J. Adem, S. Gitler e I. James, 1972

Teorema

Existen aplicaciones axiales $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^k$ si y sólo si existen inmersiones $\mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}^k$.

Conclusión

El cálculo de $TC(\mathbb{R}P^n)$ es equivalente al problema abierto de inmersión del espacio proyectivo real.

¿Cómo de complejo es calcular la complejidad topológica?

Complejidad algorítmica

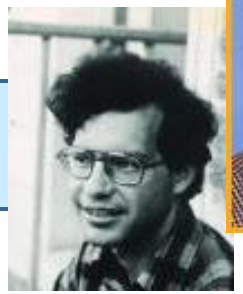
Formalmente, un *problema* $\Pi = \{I_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ es una familia de subconjuntos finitos de enteros no negativos donde cada uno de los I_α representa una instancia del problema. Así, un problema junto con sus soluciones es una función (o correspondencia si existe más de una solución) $f\colon \Pi \to \mathbb{N}$ donde $f(I)$ es la solución (o soluciones) a la instancia I.

Un *problema de decisión* es un problema f con solo dos posibles valores $\{0, 1\}$ (Sí o No).

Un problema de decisión $f\colon \Pi \to \{0,1\}$ es *decidible* si existe un algoritmo $\mathcal{A}$ que resuelve el problema: para cada instancia $I \in \Pi$, $\mathcal{A}$ produce $f(I)$ en un número finito de pasos. En otro caso, el problema es *indecidible*.

Existen problemas indecidibles en teoría de homotopía.

David Anick, 1985



Teorema

Determinar si dos espacios tienen el mismo tipo de homotopía es indecidible: ningún algoritmo puede determinar si, dados dos complejos X, Y de dimensión 4, ΩX y ΩY tienen el mismo tipo de homotopía.

Determinar el rango de los grupos de homotopía de un complejo finito es indecidible: existe un complejo simplemente conexo X y una sucesión de enteros no negativos $\{a_n\}_{n\geq 2}$ para los que ningún algoritmo puede determinar si $a_n = \operatorname{rk} \pi_n(X)$.

Un problema de decisión $f\colon \Pi \to \mathbb{N}$ (o simplemente Π) pertenece a la clase P (polinomial) si existe un algoritmo $\mathcal{A}$ que resuelve el problema en tiempo polinomial, es decir, existe un polinomio p tal que, para cada instancia $I \in \Pi$ de longitud n, $\mathcal{A}$ produce $f(I)$ en un "tiempo" acotado por n.

Un problema de decisión Π pertenece a la clase NP (polinomial no determinado) si existe un algoritmo $\mathcal{A}$ cuyas entradas son pares (I, C) donde I es una instancia del problema y C es un "certificado", y que opera de la siguiente forma:

Para cada instancia del problema para la que la respuesta es SI existe un certificado $C(I)$ tal que, tomando como entrada el par $\big(I, C(I)\big)$, el algoritmo $\mathcal{A}$ reconoce en tiempo polinomial que en efecto la respuesta a I es SI.

Para cada instancia I para la que la respuesta es NO y para cualquier entrada de la forma (I, C), el algoritmo $\mathcal{A}$ reconoce en tiempo polinomial que en efecto, la respuesta a I es NO.

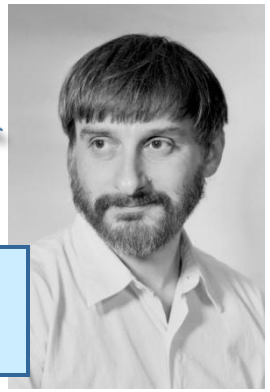
$$P \subset NP$$

¿Es esta inclusión estricta?

Stephen Cook

Eso

Leonid Levin



Un problema $\Pi \in NP$ es NP-completo si cualquier otro problema en NP puede ser reducido en tiempo polinomial q Π. Así, un algoritmo que resuelva un problema NP-completo, resolvería cualquier otro problema NP en el mismo rango de tiempo.

Un problema Π es NP-difícil si cualquier otro problema NP se puede reducir en tiempo polinomial a Π (y no se requiere $\Pi \in NP$!). Obviamente todo problema NP-completo es NP-difícil.

$$P \lhd NP \lhd \text{NP–completo} \lhd \text{NP–difícil}$$

Ejemplo

Sea G un grafo (conexo, no orientado, finito, simple, sin lazos):

$$G = \big(V(G), E(G)\big)$$

Un k-coloreado del grafo G ($k \geq 2$) es una aplicación

$$f\colon V(G) \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$$

tal que $f(v) \neq f(w)$ si $(v, w) \in E(G)$.

Existen distintas formas de codificar un grafo. La "longitud" de cualquiera de estas codificaciones está acotada por un polinomio en el número de vértices.

El problema del k-coloreado de grafos es NP-completo

Complejidad algorítmica de la complejidad topológica

A cada grafo G y a cada entero $k \geq 2$ asociamos un espacio $X_{G,k}$ simplemente conexo y racional, esto es, $\pi_*(X_{G,k}) = \pi_*(X_{G,k}) \otimes \mathbb{Q}$, donde además

$$\dim \pi_*(X_{G,k}) = \text{Número de vértices} + \text{Número de aristas.}$$

Teorema

$TC(X)$ es infinito si y solo si el grafo G es k-coloreable.

Corolario

Determinar $TC(X)$, la complejidad topológica de un espacio de configuraciones racional X, es un problema NP-difícil.

Th. Fraichard, M. Reif, Hopcroft,…

1. Complejidad topológica de espacios formales

Un espacio es formal si su tipo racional de homotopía depende de su álgebra de cohomología racional.

Dennis Sullivan 1978

Ejemplos

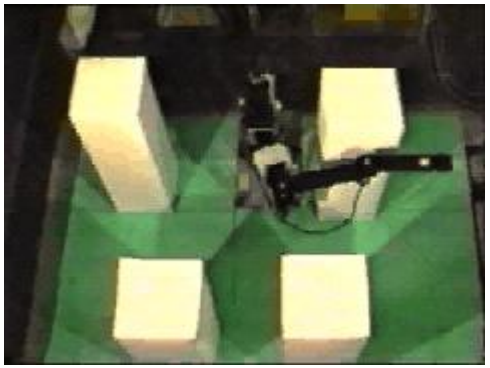
Esferas, espacios proyectivos complejos, Grassmanianas, espacios homogéneos G/H con $rk(G) = rk(H)$...

Teorema Si X es formal, $TC(X) = \mathrm{nil}\,(\ker \cup)$.

Ejemplos…

$U(6)$	$U(2) \times U(2) \times U(2)$ 24	$U(3) \times U(2) \times U(1)$ 22	$U(4) \times U(1) \times U(1)$ 18
$U(7)$	$U(3) \times U(2) \times U(2)$ 32	$U(4) \times U(2) \times U(1)$ 28	$U(5) \times U(1) \times U(1)$ 22
$U(8)$	$U(4) \times U(2) \times U(2)$ 40	$U(5) \times U(2) \times U(1)$ 34	$U(6) \times U(1) \times U(1)$ 26
$U(9)$	$U(5) \times U(2) \times U(2)$ 48	$U(6) \times U(2) \times U(1)$ 40	$U(7) \times U(1) \times U(1)$ 30

2. Complejidad topológica reducida



$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, bend left] \\ A \arrow[u, bend left] \end{tikzcd}$$

$$p\colon PX - LX \longrightarrow F(X;2)$$

La complejidad topológica reducida de X se define como $RTC(X) = secat(p)$

Teorema

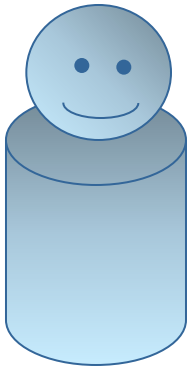
J. Carrasquel

$RTC(X)$ es un invariante del tipo racional de homotopía de n-variedades cerradas 2-conexas.

Teorema

Si X es una variedad 2-conexa formal, $RTC(X) = \text{nil}\ker H^*(p)$.

3. ¿Y si a un robot le añadimos un brazo?



$X \times S^n$

$$TC(X \times S^n) \leq TC(X) + TC(S^n)$$

¿Se da la igualdad?

Observación No es trivial...¿$\mathrm{cat}\,(X \times S^n) = \mathrm{cat}\,(X) + 1$?

S^n

Junto con B. Jessup y P.E. Parent

Teorema

$$MTC(X \times S^n) = MTC(X) + MTC(S^n)$$

Si X es coformal, $TC(X \times S^n) = TC(X) + TC(S^n)$

La clave:

Solución a uno de los problemas de M. Farber:

Describir la complejidad topológica de un espacio racional en términos algebraicos propios de esta teoría.

Sea A un álgebra del "tipo de homotopía" de un espacio X.

Tomemos la multiplicación

$$\mu\colon A \otimes A \longrightarrow A$$

Teorema

La complejidad topológica de X es el menor n para el que

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \otimes \Lambda V \arrow[d, "\simeq"] \\ A \otimes A \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[u, bend left] & A \otimes A/(\ker \mu)^{(n+1)} \end{tikzcd}$$

admite una retracción homotópica.